

北京邮电大学

本科毕业设计（论文）



题目：基于双层石墨烯的自由电子渡越辐射调控机理研究

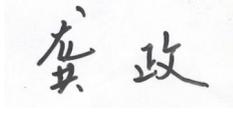
姓 名 龚 政
学 院 电子工程学院
专 业 电子科学与技术
班 级 2018211205
学 号 2018210861
班内序号 6
指导教师 张洪欣

2022 年 5 月

北京邮电大学
本科毕业设计（论文）诚信声明

本人声明所呈交的毕业设计（论文），题目《基于双层石墨烯的自由电子渡越辐射调控机理研究》是本人在指导教师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。尽我所知，除了文中特别加以标注和致谢中所罗列的内容以外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得北京邮电大学或其他教育机构的学位或证书而使用过的材料。

申请学位论文与资料若有不实之处，本人承担一切相关责任。

本人签名：

日期：2022年5月

基于双层石墨烯的自由电子渡越辐射调控机理研究

摘要

本文在经典麦克斯韦电磁理论框架下，解析计算了高速电子穿过二维平面材料双层石墨烯的电磁场分布，并研究其激发出的远场光子辐射和近场等离激元能谱特性。进而系统研究电子运动速度、双层石墨烯带隙差和光掺杂浓度等变量与自由电子渡越辐射的强度、能谱、方向性的关系。

本文首次将具有谐振增益且光学性质可调的人工电磁界面纳入渡越辐射的研究范畴，双层石墨烯的层间耦合、场效应和光激发等特性为渡越辐射引入了全新的机制。发现对于辐射能谱，远场辐射能谱峰与双层石墨烯光导谱峰出现频点一致，为二维材料特性的探测提供区别于传统电子能量损失谱法的新思路。辐射强度上，通过光激发双层石墨烯产生的谐振增益将远场辐射提升了近两个量级。辐射定向性上，揭示了增加粒子速度使辐射定向性增强的物理机理。激发特点上，发现更高速粒子有利于远场光子的激发而近场等离激元受低速粒子激发明显，并且辐射强度随粒子速度增加趋于饱和。等离激元模式上，本文论证双层石墨烯对 TM 模等离激元在深亚波长级别的强束缚，并利用光激发将双层石墨烯对 TE 模等离激元束缚程度提升 5 倍以上，有望打破等离激元器件对极化类型的限制。电磁调控上，不同于复杂的结构化电磁环境，本文创新性地阐述了如何通过改变二维材料本身的光学特性（场效应、光掺杂）对远场光子辐射进行调控，为基于渡越辐射的太赫兹光源、粒子探测器提供理论指导。

关键词 双层石墨烯 渡越辐射 表面等离激元 远场电磁调控 太赫兹技术

Photonic and Plasmonic Transition Radiation from Bilayer Graphene

ABSTRACT

In this paper, the electromagnetic field distribution of a swift electron passing through bilayer graphene is analytically calculated under the framework of classical Maxwell electromagnetic theory, and the far-field photon emission and near-field plasmon energy spectrum characteristics are investigated. Furthermore, the effects of electron velocity, band gap difference, and photodoping on the intensity, energy spectrum, and directivity of transition radiation are thoroughly investigated.

For the first time in the study of transition radiation, an artificial electromagnetic interface with adjustable optical properties and resonant gain is introduced in this paper. The interlayer coupling, field effect and pump-induced properties of bilayer graphene introduce a new radiation mechanism for transition radiation. The frequency point of the far-field radiation spectrum peak is found to be consistent with that of the optical conductivity spectrum of bilayer graphene, suggesting a new method for detecting 2D material properties that differs from the traditional Electron Energy Loss Spectrum method. In terms of radiation intensity, the pump-induced resonant gain in the optical spectrum increases the far-field radiation by three orders of magnitude. As for radiation directivity, the physical mechanism of better directivity caused by increased particle velocity is revealed. In terms of radiation excitation characteristics, it is found that the far-field photon is obviously excited by high-speed particles, whereas the near-field plasmons favor low-speed electron, and the near-field radiation intensity tends to saturation with the increase of particle velocity. As for the polarization of plasmons, the support of bilayer graphene for TE plasmons with strong confinement is described in this paper theoretically. And this paper improves the confinement of TE plasmons by 5 times based on pump-induced resonant gain which is expected to break the restriction of polarization type of plasmonic applications. In terms of electromagnetic regulation, different from structured electromagnetic environment, this paper creatively expounds how to regulate far-field photon emission by changing the optical properties of 2D materials, field effect and optical doping, for example, providing theoretical guidance for terahertz light source and particle detector based on transition radiation.

KEY WORDS Bilayer graphene Transition radiation Far-field radiation regulation Surface plasmon polaritons Terahertz technology

目 录

第一章 绪论	1
1.1 背景	1
1.1.1 渡越辐射 (Transition Radiation)	1
1.1.2 双层石墨烯	1
1.1.3 基于二维材料的渡越辐射	1
1.2 研究意义	2
1.3 主要研究内容	2
1.4 本文结构	2
第二章 双层石墨烯光导特性	3
2.1 堆叠方式和能带结构	3
2.2 Kubo 机理	4
2.3 K-K 关系	6
2.3.1 因果律	6
2.3.2 希尔伯特变换	7
2.3.3 转化负频响应	8
2.4 结果及讨论	8
2.4.1 光导特点	9
2.4.2 模型有效性	9
2.5 本章小节	9
第三章 辐射电磁模型	10
3.1 运动描述	10
3.2 电磁场求解	11
3.2.1 z 方向分量亥姆霍兹方程	11
3.2.2 边界条件匹配	12
3.2.3 柱坐标下的场量形式	13
3.2.4 索末菲积分	14
3.3 电磁场分布	17
3.4 本章小节	18
第四章 远场: 光子辐射	19
4.1 能量角谱与能谱	19
4.2 解析及数值结果	20

4.2.1	解析解	20
4.2.2	强度与定向性	21
4.3	本章小节	23
第五章	近场：等离激元（TM 模）	24
5.1	等离激元强度与分布	24
5.1.1	无损色散媒介中的近场能量	24
5.1.2	TM 模等离激元色散	26
5.2	数值结果	27
5.3	TM 等离激元束缚强度	28
5.4	强束缚的 TE 模表面等离激元	30
5.5	本章小节	31
第六章	远场电磁调控	32
6.1	温度	32
6.2	光泵激发（光掺杂）	32
6.3	场效应	33
6.4	调控准则	34
6.5	本章小节	34
第七章	展望渡越辐射	35
7.1	本文贡献	35
7.2	基础辐射机理与应用	35
7.3	电子运动方式	36
7.4	结构化电磁环境	36
7.4.1	二维材料	36
7.4.2	光子晶体	36
7.4.3	（双）各向异性介质板	36
参考文献	38
致谢	42
附录	43
附录 1	单层石墨烯光导	43
附录 2	求解双层石墨烯光导的另一方式 ^[36]	43

第一章 绪论

1.1 背景

1.1.1 渡越辐射（Transition Radiation）

作为一种典型的辐射过程，渡越辐射（TR）^[1-3]在 1945 年被诺贝尔物理学奖得主 Vitaly Ginzburg 教授和 Ilya Frank 教授理论提出，在 1959 年得到实验验证^[4]。当带电粒子在空间非均一介质中运动（例如穿过单层界面）时会产生渡越辐射，近场电磁波以表面等离子激元形式存在，远场以光子形式辐射。不同于切伦科夫辐射^[5-7]（Cherenkov Radiation）对粒子速度 v 的阈值限制（ $v > \frac{c}{n}$ ，即：粒子速度大于介质中光的相速度， c 为真空光速， n 为介质折射率），渡越辐射对粒子速度没有要求，并且结合周期性微纳结构^[8]或周期性电子流^[9-11]，可以激发强度更强，方向性更高的共振（相干）渡越辐射^[12]。因此，渡越辐射可被用作微波段，太赫兹^[13]到 X 射线波段^[14,15]的辐射源。

另一方面，对于实物带电粒子激发的渡越辐射，单位面积远场（光子）辐射能量正比于洛伦兹因数 γ （ $\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ ），于是基于渡越辐射的高能粒子探测器^[16]应运而生。对于超出切伦科夫探测器^[17]有效探测范围的高能粒子，渡越辐射探测器能实现有效探测。由于没有速度阈值，渡越辐射探测器对介质材料的选取更为灵活，与介质作用较短距离即可产生高定向性的辐射，为实现更高的集成度提供了更多材料选择。

1.1.2 双层石墨烯

单层或少层的二维材料^[18]较其三维体材料可以获得许多新的特性。如单层石墨烯^[19]作为碳原子的二维结晶聚合物，激发光谱具有线性特点和手性对称性，以及极强的电子迁移率等独特的电学和晶体特性，使之成为纳米电子学和光子学等众多领域实验、理论研究的热点。

双层石墨烯^[20]可用二维材料模型描述，聚合方式分为 A-A 和 A-B (Bernal Stacking) 两种，其中 A-A 堆叠处于亚稳态^[21]，A-B 堆叠双层石墨烯更为稳定，被更为广泛的用于实验当中。Edward McCann^[22]2006 年提出了有效的紧束缚模型描述双层石墨烯的能带结构，进而后续研究基于 Kubo 机理得出 A-B 双层石墨烯的表面电导率^[23]，在实验中得到印证。研究^[24-26]表明，在兼有单层石墨烯良好光学特性的基础上，双层石墨烯带隙差可以通过表面层间压降实现在 0.1 eV~0.3 eV 范围内线性可调，进而在光谱上出现可调的吸收峰^[27-29]，另外，由于光激发可以产生谐振增益，为新型太赫兹器件和碳基量子点^[30]与晶体管^[31,32]提供了应用前景。

基于双层石墨烯独特的光导特性，其表面等离子激元特性有许多新奇的发现，如实验上，在中红外区由于层间光子耦合会引发的新的等离子体激元模式^[33]以及可调的光学透明性窗口^[34,35]。理论上，基于光泵激发的非稳态双层石墨烯^[36]，对在带隙差附近具有谐振增益的（群速度）超光速等离子激元进行了预测，为基于表面等离子体激元的放大器和激光^[37]提供了应用前景。

1.1.3 基于二维材料的渡越辐射

电子束能实现在纳米级的精确的空间控制，这为研究高速电子与二维材料^[38]（或其异质结^[39]）的相互作用提供了高效的研究手段，电子被广泛用于二维材料表面等离激元特性^[40]的研究当中，例如电子能量损失谱法（EELS）^[41-43]中将高速电子作为探测源。另一个角度看，二维材料灵活可调^[44]的光学特性也为实现更为灵活可控的渡越辐射的控制提供了平台。

1.2 研究意义

双层石墨烯（Bilayer graphene）和单层石墨烯（Monolayer graphene）都具有典型二维材料的独特光学特性，但是前者独有的场效应^[45]控制的带隙差、层间光子耦合产生的光谱吸收峰以及光掺杂引发的共振增益等，为从材料本身实现对于渡越辐射调控提供了一个有前景的平台。另外，受不同光激发强度的准平衡态双层石墨烯^[36]带来不同的谐振增益，也为实现辐射强度的调控提供了条件。同时，准平衡态双层石墨烯较大的光导虚部，使实现强束缚的 TE 模^[46]的表面等离激元成为可能。

在麦克斯韦电磁学框架下，单个快电子激发单层石墨烯的表面等离激元和远场光子的机理^[47]已经得到研究，但是如何对渡越辐射实现有效的强度、方向控制值得更进一步的研究。结构化的电磁环境能够对辐射的方向性、强度进行调控，但是其设计周期长，实验动态性差，因此如何通过改变二维材料本身的光学特性对渡越辐射实现调控具有重要意义。

1.3 主要研究内容

本文在数值求解双层石墨烯光导的前提下，基于麦克斯韦方程组解析得出电磁场分布以及远、近场能谱特性，揭示了近、远场激发的机理与特点。进而研究温度、带隙差、载流子倒置态化学势和电子散射率（电子弛豫时间）等参数对远场辐射强度的影响，为实现调节二维材料本身光导特性对远场电磁波进行调控提供理论指导。本文首次将增益界面纳入渡越辐射的研究范围，为渡越辐射提供了崭新的机理。

1.4 本文结构

第一章阐述基于二维材料的渡越辐射的研究背景及意义。第二章利用紧束缚近似得到双层石墨烯的能带结构并基于 Kubo 机理得出其光导特性。第三章在麦克斯韦方程组的经典电磁学框架下，利用平面波展开法并构造索末菲积分路径解析计算了频域电磁场分布。第四、五章基于波印亭定理得出远、近场能谱。第六章从理论上得出利用双层石墨烯光导实现对远场辐射进行调控的准则，为实现太赫兹至光波段的可调光源、高速粒子探测器提供理论基础；第七章对渡越辐射广阔的研究、应用前景进行了展望。

第二章 双层石墨烯光导特性

本章以求解双层石墨烯光导为主线，从堆叠方式切入，利用紧束缚模型对双层石墨烯的能带结构进行描述，进而利用多体物理中著名的 Kubo 公式架起光导与能带机构的桥梁。进而，利用电磁材料本身的因果律约束，基于 K-K 关系求得光导虚部，完备了双层石墨烯的光导。为后续电磁辐射机理的研究提供了材料参数的基础与前提。由于 A-A 堆叠双层石墨烯处于亚稳态^[21]，本章只考虑 A-B 堆叠双层石墨烯。

2.1 堆叠方式和能带结构

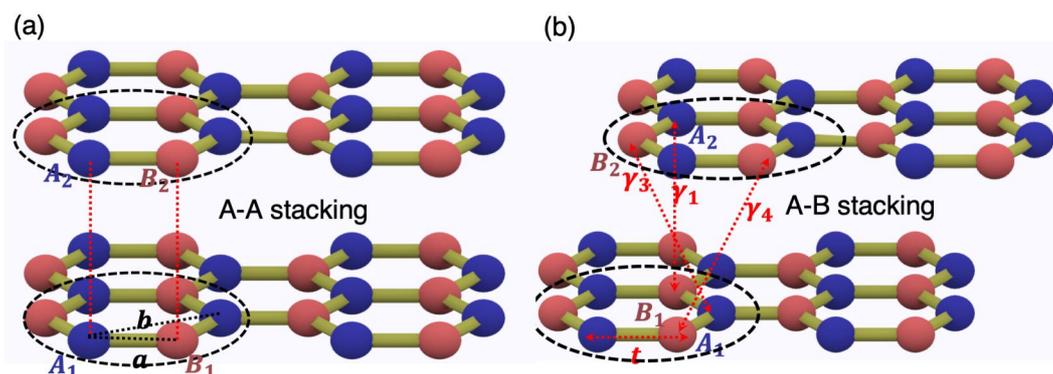


图 2-1(a) A-A 堆叠：紧邻距离 a ，晶格常数 b ；(b) A-B 堆叠：原子间跃迁能 $t, \gamma_1, \gamma_3, \gamma_4$ 。

为得出双层石墨烯的光导特性，本文先研究其能带结构。A-B 堆叠中^[19]，每层石墨烯由三角晶格组成，上层 A 基元与下层 B 基元对应相连，其他基元在下层六边形中央上方如图 2-1 所示。（A-A 堆叠中，层间原子空间上一一对应。）

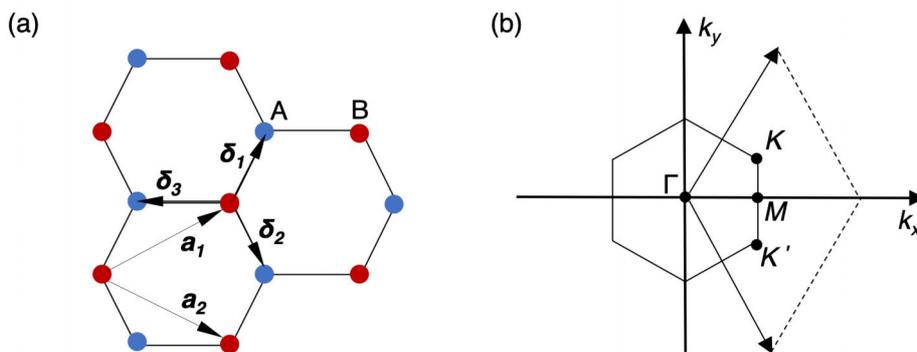


图 2-2 单层石墨烯晶格及布里渊区(a)石墨烯六角晶格；(b)布里渊区,狄拉克锥位于 K 和 K'

电场作用下双层石墨烯打开带隙 Δ ，基于紧束缚近似，单自旋哈密顿量为：

$$\begin{aligned}
 H = & -t \sum_{n,\delta} (a_{1,n+\delta}^\dagger b_{1,n} + H.c.) - t \sum_{n,\delta'} (a_{2,n}^\dagger b_{2,n+\delta'} + H.c.) + \gamma_1 \sum_n (a_{2,n}^\dagger b_{1,n} + H.c.) - \\
 & \frac{\Delta}{2} \sum_n (a_{1,n+\delta_1}^\dagger a_{1,n+\delta_1} + b_{1,n}^\dagger b_{1,n}) + \frac{\Delta}{2} \sum_n (a_{2,n}^\dagger a_{2,n} + b_{2,n+\delta'_1}^\dagger b_{2,n+\delta'_1})
 \end{aligned} \quad (2-1)$$

其中，前两项表示层内电子最近邻跃迁项， t 约为 2.8 eV，下标 2、1 表示上、下层，第三项表示层间耦合 γ_1 （约 0.39 eV），忽略 γ_3 （约 0.315 eV）， γ_4 （约 0.04 eV），最后两项表示，层 1 能量降低 $\frac{\Delta}{2}$ ，层 2 提高 $\frac{\Delta}{2}$ 。

式中算符： $a_{m,n}^\dagger$ （ $b_{m,n}^\dagger$ ）表示在 m 层双层石墨基层元 A_m （ B_m ）的位矢 \mathbf{n} 处产生一个电子， $a_{m,n}$ （ $b_{m,n}$ ）表示在第 m 层双层石墨基层元 A_m （ B_m ）的 n 处湮灭一个电子。 $H.c.$ 表示另一项的厄米共轭，如 $a_{1,n+\delta}^\dagger b_{1,n} + H.c. = a_{1,n+\delta}^\dagger b_{1,n} + a_{1,n+\delta} b_{1,n}^\dagger$ 。位矢 δ 表示在位矢 \mathbf{n} 处指向最近邻原子的矢量如图 2-2 示，且 $\delta'_i = -\delta_i$ 。

利用哈密顿变换 $\hat{H} = \sum_k \Psi^\dagger(k) H \Psi(k)$ ，本征向量 $\Psi(k) = (a_{1,k}, b_{2,k}, a_{2,k}, b_{1,k})$ ，得到 \mathbf{k} 空间哈密顿量为：

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} -\frac{\Delta}{2} & 0 & 0 & \phi^*(\mathbf{k}) \\ 0 & \frac{\Delta}{2} & \phi(\mathbf{k}) & 0 \\ 0 & \phi^*(\mathbf{k}) & \frac{\Delta}{2} & \gamma_1 \\ \phi(\mathbf{k}) & 0 & \gamma_1 & -\frac{\Delta}{2} \end{pmatrix} \quad (2-2)$$

其中 $\phi(\mathbf{k}) = -t \sum_{\delta} e^{i\mathbf{k}\delta} = -t \sum_{\delta'} e^{-i\mathbf{k}\delta'}$ 。双层石墨烯的能带结构^[22]由 \hat{H} 的本征值定义如下：

$$\epsilon_{\alpha}^2(k) = \frac{\gamma^2}{2} + \frac{\Delta^2}{4} + |\phi(k)|^2 + (-1)^{\alpha} \sqrt{\left(\frac{\gamma^4}{4} + |\phi(k)|^2 (\gamma^2 + \Delta^2) \right)} \quad (2-3)$$

其中 α 可取 1, 2，在这四个能带中， $\pm\epsilon_1(k)$ 表征低能修正下的原始石墨烯低能带， $\pm\epsilon_2(k)$ 反映了基元 A_2 和 B_1 之间的二聚键（跃迁能 γ_1 ），由于主要的低能物理发生在石墨烯布里渊区两个不等价的 K 和 K' 点， $\phi(\mathbf{k})$ 可以在连续介质近似中围绕 K 点展开为 $\phi(\mathbf{k}) = \hbar v_F \mathbf{k}$ ，其中 $v_F = \sqrt{3}tb/(2\hbar)$ 。值得注意的是，由场效应^[45]线性控制的带隙 Δ 为频率独立的光导特性带来了独特的丰富的结构和可控性。

2.2 Kubo 机理

进一步，基于 Kubo 公式^[48]，本文对石墨烯电导率实部进行求解。定义格林函数 \hat{G} 如下：

$$\hat{G}^{-1} = z\hat{I} - \hat{H} = \begin{pmatrix} z + \frac{\Delta}{2} & 0 & 0 & \phi^*(\mathbf{k}) \\ 0 & z - \frac{\Delta}{2} & \phi(\mathbf{k}) & 0 \\ 0 & \phi^*(\mathbf{k}) & z - \frac{\Delta}{2} & \gamma_1 \\ \phi(\mathbf{k}) & 0 & \gamma_1 & z + \frac{\Delta}{2} \end{pmatrix} \quad (2-4)$$

其中 $z = i\omega_n$, $\omega_n = \pi T(2n + 1)$ 为费米子松原频率 $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, T 为开尔文温度, 为求解光导, 本文对 G_{11} , G_{22} , G_{33} , G_{44} , G_{13} , G_{24} , 对式(2-4)求逆, 得:

$$\begin{aligned} G_{11} &= \frac{(\Delta - 2z) \left(\Delta^2 + 4\gamma^2 - 4z^2 \right) - 4|\phi(k)|^2 (\Delta + 2z)}{8(z^2 - \epsilon_1^2)(z^2 - \epsilon_2^2)} \\ G_{44} &= \frac{(\Delta - 2z) \left[(\Delta - 2z)^2 - 4|\phi(k)|^2 \right]}{8(z^2 - \epsilon_1^2)(z^2 - \epsilon_2^2)} \\ G_{13} &= \frac{(2z - \Delta)\gamma\phi(k)}{2(z^2 - \epsilon_1^2)(z^2 - \epsilon_2^2)} \end{aligned} \quad (2-5)$$

由关系 $G_{22}(\Delta) = G_{11}(-\Delta)$, $G_{33}(\Delta) = G_{44}(-\Delta)$, $G_{24}(\Delta, \phi) = G_{13}(-\Delta, \phi^*)$ 得出剩余项。下遵循标准 Kubo 公式流程计算电导 $\sigma_{\alpha\beta}$:

$$\sigma_{\alpha\beta}(\Omega) = \frac{Im[\Pi_{\alpha\beta}(\Omega + i0^+)]}{\Omega} \quad (2-6)$$

其中 α, β 为空间方向, 可取 x, y, z , 本文关心平行于石墨烯平面($z = 0$ 平面)的纵电导即, σ_{zz} 。 $\Pi_{\alpha\beta}(\Omega + i0^+)$ 为迟滞电流-电流作用方程(极化方程), 可由松原公式^[48]得出:

$\Pi_{\alpha\beta}(i\nu_m) = -\int_0^{1/T} d\tau e^{i\nu_m\tau} \langle T_\tau J_\alpha(\tau) J_\beta(0) \rangle$, τ 为虚时间, T_τ 为排序算子, $\nu_m = 2\pi mT$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $J_\alpha(\tau) = \sum_n j_\alpha^p(\tau, \mathbf{n})$ 为电流算符。为计算 $j_\alpha^p(\tau, \mathbf{n})$, 通过皮尔斯替换^[49](Peierls substitution) 关联哈密顿量 $a_{1, \mathbf{n}+\delta}^\dagger b_{1, \mathbf{n}} \rightarrow a_{1, \mathbf{n}+\delta}^\dagger e^{-\frac{ie}{\hbar} \int_n^{\mathbf{n}+\delta} dr \cdot \mathbf{A}} b_{1, \mathbf{n}}$ 。且 $j_{\alpha p}(\mathbf{n}) = -\frac{\partial H}{\partial (A_\alpha(\mathbf{n}))}$, 对

\mathbf{A} 作一阶泰勒展开得 $a_{1, \mathbf{n}+\delta}^\dagger b_{1, \mathbf{n}} \rightarrow a_{1, \mathbf{n}+\delta}^\dagger e^{-\frac{ie}{\hbar} \mathbf{A} \cdot \delta} b_{1, \mathbf{n}}$, 所以可得:

$$j_\alpha^p(\mathbf{n}) = -\frac{ite}{\hbar} \sum_\delta (\delta)_\alpha (a_{1, \mathbf{n}+\delta}^\dagger b_{1, \mathbf{n}} - H.c.) + \frac{ite}{\hbar} \sum_{\delta'} (\delta')_\alpha (a_{2, \mathbf{n}}^\dagger b_{2, \mathbf{n}+\delta'} - H.c.) \quad (2-7)$$

傅立叶变换至 \mathbf{k} 域并对 \mathbf{n} 求和, 得总顺磁电流算子为 $J_\alpha(\mathbf{k}) = -e \sum_{\mathbf{k}} \Psi^\dagger \hat{v}_\alpha \Psi$, 且:

$$\hat{v}_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & v_{\alpha k}^* \\ 0 & 0 & v_{\alpha k} & 0 \\ 0 & v_{\alpha k}^* & 0 & 0 \\ v_{\alpha k} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2-8)$$

其中: $v_{\alpha k} = -\left(\frac{it}{\hbar}\right) \sum_\delta (\delta)_\alpha e^{ik \cdot \delta} = \frac{\nabla \phi(\mathbf{k})}{\hbar}$, 因此, 可化简极化函数:

$$\prod_{\alpha\beta} (i\nu_m) = e^2 T \sum_{i\omega_n} \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} Tr[\hat{v}_\alpha \hat{G}(i\omega_n + i\nu_m, \mathbf{k}) \hat{v}_\beta \hat{G}(i\omega_n, \mathbf{k})] \quad (2-9)$$

或将格林函数展开(形式类似希尔伯特变换)成谱函数

$$G_{ij}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{A_{ij}(\omega')}{2\pi(z - \omega')} \quad (2-10)$$

在单频点展开谱函数:

$$A_{ij}(\omega, \Delta) = \sum_{\alpha=1,2} [a_{ij}(\alpha, \Delta) \delta(\omega - \epsilon_\alpha) + a_{ij}(\alpha, -\Delta) \delta(\omega + \epsilon_\alpha)] \quad (2-11)$$

联立式(2-5), (2-10), (2-11), 得:

$$\begin{aligned}
a_{11}(\alpha, \Delta) &= \frac{(-1)^{(\alpha+1)}\pi}{\epsilon_2^2 - \epsilon_1^2} \left(\left[\left(\frac{\Delta}{2} \right)^2 + \gamma_1^2 - \epsilon_\alpha^2 \right] \left(1 - \frac{\Delta}{2\epsilon_\alpha} \right) + |\phi(\mathbf{k})|^2 \left(1 + \frac{\Delta}{2\epsilon} \right) \right) \\
a_{44}(\alpha, \Delta) &= \frac{(-1)^{(\alpha+1)}\pi}{\epsilon_2^2 - \epsilon_1^2} \left(\left[\left(\frac{\Delta}{2} \right)^2 - \epsilon_\alpha^2 \right] \left(1 - \frac{\Delta}{2\epsilon_\alpha} \right) + |\phi(\mathbf{k})|^2 \left(1 + \frac{\Delta}{2\epsilon} \right) \right) \\
a_{13}(\alpha, \Delta) &= \frac{(-1)^\alpha \pi}{\epsilon_2^2 - \epsilon_1^2} \left(1 - \frac{\Delta}{2\epsilon_\alpha} \right) \gamma_1 \phi(\mathbf{k})
\end{aligned} \tag{2-12}$$

进而：

$$\sigma_{\alpha\beta}(\omega) = \frac{e^2}{2\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dE}{2\pi} [f(E) - f(E + \hbar\omega)] \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \text{Tr}[\hat{v}_\alpha \hat{A}(E + \hbar\omega, \mathbf{k}) \hat{v}_\beta \hat{A}(E, \mathbf{k})] \tag{2-13}$$

其中， $f(E) = \left(e^{\frac{E-\mu}{k_B T}} + 1 \right)^{-1}$ 为费米-狄拉克分布（Fermi-Dirac Distribution）， k_B 为玻尔兹曼常数（Boltzmann constant）， μ 为化学势（Chemical Potential）。当双层石墨烯处于在非稳态，如光泵激发下，电子-空穴对处于载流子倒置态，各占一费米能级 μ_e 和 μ_h （对电中性系统， $\mu_e = -\mu_h$ ），利用准平衡分布 $n_F(\dots)$ 替换 $f(\dots)$ ：

$$n_F(E) = \theta(E)f(E - \mu_e) + \theta(-E)f(E - \mu_h) \tag{2-14}$$

其中 $\theta(E)$ 为单位阶跃函数（Heaviside step function）。进一步化简得到 A-B 堆叠双层石墨烯光导实部：

$$\begin{aligned}
\text{Re}[\sigma_s] &= \frac{e^2}{2\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dE}{2\pi} [f(E) - f(E + \hbar\omega)] \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} |v_k|^2 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&\begin{pmatrix} A_{11}(E, \Delta)A_{44}(E + \hbar\omega, \Delta) + A_{44}(E, \Delta)A_{11}(E + \hbar\omega, \Delta) \\ A_{11}(E, -\Delta)A_{44}(E + \hbar\omega, -\Delta) + A_{44}(E, -\Delta)A_{11}(E + \hbar\omega, -\Delta) \\ 2A_{13}(E, \Delta)A_{13}^*(E + \hbar\omega, -\Delta) + 2A_{13}^*(E, -\Delta)A_{13}(E + \hbar\omega, \Delta) \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{2-15}$$

其中 $A_{ij}(\omega, \Delta)$ 由式(2-11)定义。值得说明的是，此模型利用狄拉克函数的洛伦兹展开刻画石墨烯中电子散射率：

$$\delta(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\eta}{\omega^2 + \eta^2}, \quad \frac{1}{\tau_{imp}} = 2\eta \tag{2-16}$$

τ_{imp} 为强度调制光电流光谱（Intensity-modulated photocurrent spectroscopy）反映的电子平均运输时间，在一些工作中称为电子弛豫时间。

2.3 K-K 关系

表面电导率满足 Kramers-Krönig relations:

$$\sigma_{sI}(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{\infty} d\alpha \frac{\sigma_{sR}(\alpha) - \sigma_{s\infty}}{\alpha^2 - \omega^2} \tag{2-17}$$

其中 \mathcal{P} 为柯西主值积分。综上，A-B 堆叠结构双层石墨烯表面电导率由式(2-15)，(2-17)解析表出，进行数值计算得出结果见图 2-4，下对光导 K-K 关系推导。

2.3.1 因果律

首先研究复介电常数的实部与虚部， $\bar{D}(t)$ 可以看作 $\bar{E}(t)$ 经过系统 $\epsilon(t)$ 的线性响应
 $\bar{D}(t) = \int_{-\infty}^t d\tau \epsilon(t-\tau) \bar{E}(\tau) = \int_0^{\infty} d\tau \epsilon(\tau) \bar{E}(t-\tau)$ ，傅立叶变换至频域：

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \bar{D}(\omega) e^{-i\omega t} &= \int_0^{\infty} d\tau \epsilon(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \bar{E}(\omega) e^{-i\omega(t-\tau)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left[\int_0^{\infty} d\tau \epsilon(\tau) e^{i\omega\tau} \right] \bar{E}(\omega) e^{-i\omega t} \end{aligned} \quad (2-18)$$

观察电磁场对因子 $e^{-i\omega t}$ 的依赖性，定义 $\epsilon(\omega)$ 为：

$$\epsilon(\omega) = \int_0^{\infty} d\tau \epsilon(\tau) e^{i\omega\tau} \quad (2-19)$$

注意到， τ 的积分下限为0，这是由于因果律的体现，且由式(2-19)不难得到， $\epsilon(-\omega) = \epsilon^*(\omega)$ ，分离实部和虚部，亦即：

$$\epsilon_R(-\omega) = \epsilon_R(\omega), \quad \epsilon_I(-\omega) = -\epsilon_I(\omega) \quad (2-20)$$

同理，双各向异性材料的本构参数在因果律的约束下均满足共轭对称。

基于介电常数，联立欧姆定律 $\bar{J}_c = \bar{\sigma} \cdot \bar{E}$ 和麦克斯韦方程 $\nabla \times \bar{H} = -i\omega \bar{D} + \bar{J}_c + \bar{J}_f$ 得：

$$\nabla \times \bar{H} = -i\omega [\bar{\epsilon} + \frac{i}{\omega} \bar{\sigma}] \cdot \bar{E} - i\omega \bar{\xi} \cdot \bar{H} + \bar{J}_f \quad (2-21)$$

从而 $\bar{\epsilon}_c = \bar{\epsilon} + i \frac{\bar{\sigma}}{\omega}$ ，即： $\bar{\sigma}$ 满足形如(2-19)的因果律，同时取二维极限， $\bar{\sigma}$ 约化为面电导，定义：

$$\sigma_s(\omega) = \int_0^{\infty} d\tau \sigma_s(\tau) e^{i\omega\tau} \quad (2-22)$$

由上定义式不难得出 σ_s 也满足共轭对称 $\sigma_s(-\omega) = \sigma_s^*(\omega)$ 且 $\sigma_s(i\omega_I) = \sigma_s^*(i\omega_I)$ 。

2.3.2 希尔伯特变换

由 $\sigma_s(\omega)$ 定义式，得 $\sigma_s(\omega_R + i\omega_I) = \int_0^{\infty} d\tau \sigma_s(\tau) e^{i\omega_R\tau} \cdot e^{-\omega_I\tau}$ ， $e^{-\omega_I\tau}$ 为衰减因子， $e^{i\omega_R\tau}$ 为振荡因子，不难得出在 ω 平面上半部分 $|\sigma_s(\omega) - \sigma_{s\infty}|$ 呈指数衰减至0，因此在 ω 上半平面解析，这是因果律 $\tau > 0$ 作用的直接结果。

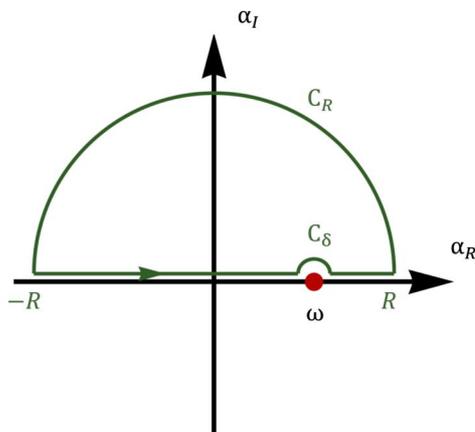


图 2-3 推导 K-K 关系的积分路径， $R \rightarrow \infty$ ， $\delta \rightarrow 0^+$ 。

构造曲线积分 $\oint_C d\alpha \frac{\sigma_s(\alpha) - \sigma_{s\infty}}{\alpha - \omega}$ ，由柯西定理：

$(\oint_{C_\delta} d\alpha + \oint_{C_R} d\alpha + \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha) \frac{\sigma_s(\alpha) - \sigma_{s\infty}}{\alpha - \omega} = 0$ ，其中：对第一项，令 $\alpha = \omega + \delta e^{i\theta}$ ，则 $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \oint_{C_\delta} d\alpha \frac{\sigma_s(\alpha) - \sigma_{s\infty}}{\alpha - \omega} = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \int_{\pi}^0 d\theta \frac{\sigma_s(\omega + \delta e^{i\theta}) - \sigma_{s\infty}}{\delta e^{i\theta}} \times (i\delta e^{i\theta}) = -i\pi [\sigma_s(\omega) - \sigma_{s\infty}]$ ，对第二项，由约当引理^[50]， $\oint_{C_R} d\alpha \frac{\sigma_s(\alpha) - \sigma_{s\infty}}{\alpha - \omega} = 0$ ，得： $\mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \frac{\sigma_s(\alpha) - \sigma_{s\infty}}{\alpha - \omega} - i\pi [\sigma_s(\omega) - \sigma_{s\infty}] = 0$ ，且利用 $\sigma_{s\infty} = \sigma_{sR\infty}$ ，即： $\sigma_{sI\infty} = 0$ ，则：

$$\begin{aligned} \sigma_{sR}(\omega) - \sigma_{s\infty} &= \mathcal{H}(\sigma_{sI}(\alpha)) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \frac{\sigma_{sI}(\alpha)}{\alpha - \omega} \\ \sigma_{sI}(\omega) &= -\mathcal{H}(\sigma_{sR}(\alpha) - \sigma_{s\infty}) = -\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \frac{\sigma_{sR}(\alpha) - \sigma_{s\infty}}{\alpha - \omega} \end{aligned} \quad (2-23)$$

其中， \mathcal{H} 表示由 α 域到 ω 域的希尔伯特变换。上式即为联系满足因果律关系的电磁参数实部与虚部的关系，被称为 K-K 关系，其数学本质为具有因果关系的平方可积函数的希尔伯特变换。

2.3.3 转化负频响应

在求解光导过程中，由于共轭对称性质的约束，正频响应决定了负频响应 $\sigma_s(-\omega) = \sigma_s^*(\omega)$ ，即： $\sigma_{sR}(-\omega) = \sigma_{sR}(\omega)$ ， $\sigma_{sI}(-\omega) = -\sigma_{sI}(\omega)$ ，进而对负频部分进行转化（被积函数同乘 $(\alpha + \omega)$ 并利用共轭对称性（实部偶函数，虚部奇函数））： $\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \frac{\sigma_{sI}(\alpha)}{\alpha - \omega} = \frac{1}{\pi} \left(\mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \frac{\alpha \sigma_{sI}(\alpha)}{\alpha^2 - \omega^2} + \frac{\omega \sigma_{sI}(\alpha)}{\alpha^2 - \omega^2} \right) = \frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{\infty} d\alpha \frac{\alpha \sigma_{sI}(\alpha)}{\alpha^2 - \omega^2}$ ，得：

$$\sigma_{sR}(\omega) - \sigma_{s\infty} = \frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{\infty} d\alpha \frac{\alpha \sigma_{sI}(\alpha)}{\alpha^2 - \omega^2} \quad (2-24)$$

同理可得其对偶项式(2-17)。

2.4 结果及讨论

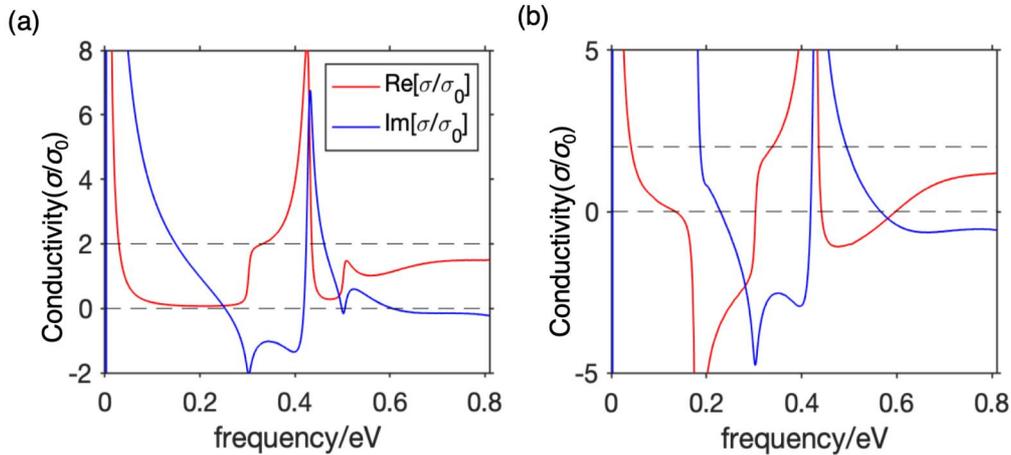


图 2-4A-B 型双层石墨烯光导。 $\sigma_0 = e^2/(4\hbar)$ ， $T=300$ K，电子色散率 $\eta = 10/(2\pi)$ mV，非对称带隙

$\Delta = 0.2 \text{ eV}$ 。(a)电子空穴费米能级 $\mu_e = \mu_h = 0.3 \text{ eV}$ ；(b)处于载流子倒置态 $\mu_e = -\mu_h = 0.3 \text{ eV}$ 。

2.4.1 光导特点

如图 2-4(a)所示,不同于单层石墨烯,掺杂 A-B 型石墨烯在外加电场作用下打开 0.2 eV 带隙差时,在 $\hbar\omega \approx \gamma_1$ 处存在吸收峰,可归结为两层导带相差 γ_1 ,而由于 Δ 的存在,使得该吸收峰与 γ_1 存在略微偏移,并且将此峰拓宽到 $\hbar\omega \pm \frac{\Delta}{2}$ 范围。在光激发后的载流子倒置准平衡态,处于 $\Delta \lesssim \hbar\omega \lesssim \mu_e - \mu_h$,且在 γ_1 附近的吸收峰仍然存在,二者综合效果。如上图(b)所示,在 Δ 附近有很高的谐振增益。

2.4.2 模型有效性

明尼苏达大学 Tony Low^[33]教授对 A-B 型石墨烯光导采用另一更为简洁的表达形式:

$$\sigma_{\alpha\alpha}(q, \omega) = -i \frac{g\hbar e^2}{(2\pi)^2} \sum_{nn'} \int d\mathbf{k} \frac{f(E_{n\mathbf{k}}) - f(E_{n'\mathbf{k}'})}{E_{n\mathbf{k}} - E_{n'\mathbf{k}'}} \times \frac{|\langle \Psi_{n\mathbf{k}} | \hat{v}_\alpha | \Psi_{n'\mathbf{k}'} \rangle|^2}{E_{n\mathbf{k}} - E_{n'\mathbf{k}'} + \hbar\omega + i\eta} \quad (2-25)$$

其中 $g = g_s g_v$ 为简并度、旋简并与谷简并之积。 $\Psi_{n\mathbf{k}}$ 为波函数, $E_{n\mathbf{k}}$ 为能量本征值,可由对角化 \hat{H} 得到。 $\eta = \hbar/\tau_e$, τ_e 为电子弛豫时间。不同的是,本文引入格林函数及狄拉克函数的洛伦兹展开描述电子散射率,本文将图 2-4(下称复现图)与 Tony Low 教授的工作^[36](见附录 2)(下称原图)进行对比验证发现:

复现图 η 与原图相差 2π 倍,观察实部,原图更为“陡峭”,观察虚部,变化趋势十分一致,在大于 γ_1 范围强度上差别明显,由于复现图的虚部基于实部由 K-K 关系得出,这种“放大”的差别来自于 γ_1 处吸收峰强度差。原因在于两种模型描述阻尼(散射)的近似方式不同,相差 2π 倍(差 2π 倍只是猜想,另一种有依据的猜想是 Tony Low 教授参数参数写错了,通过对比文献^[33,36]中双层石墨烯光导发现,虽然 Tony Low 教授选取了相同的阻尼常数,但其阻尼程度并不自洽)。但都是近似,在 η 较小时,二者差别可以忽略,本文的代码所基于的模型是有效、可用的。当 η 较大时,需要引入自能量。

另外,两种模型都未涉及层间光子耦合导致的吸收峰(0.2 eV 左右),因为理论尚未完善仍然存在争议。

值得说明的是,虽然本文模型引入格林函数对光导的表达式不够简洁,但计算复杂度上具有更大的优势。观察到矩阵的对称共轭特点,将 4×4 矩阵的对角化,简化为格林函数矩阵中 3 个元素的求解,计算量减小了一倍以上。

2.5 本章小节

本章详细阐述如何基于 Kubo 机理得出双层石墨烯的光导特性。首先利用紧束缚近似模型得出能带结构,进而代入 Kubo 公式,利用谱展开等方法得出光导实部,从而利用 K-K 关系以及因果律得出正频范围内光导虚部。最后对双层石墨烯光导进行分析,并且通过对比标准已发表权威刊物得出本文光导模型的可靠性,并且将计算量减小一倍以上。

第三章 辐射电磁模型

本章在第二章求得双层石墨烯光导的基础上，将其置于前后向介质界面处进行修饰，进而建立高速电子穿过双层石墨烯的渡越辐射模型。利用平面波展开，纵向分量表达电磁场的完备性和索末菲积分等方法对电磁场进行求解。

3.1 运动描述

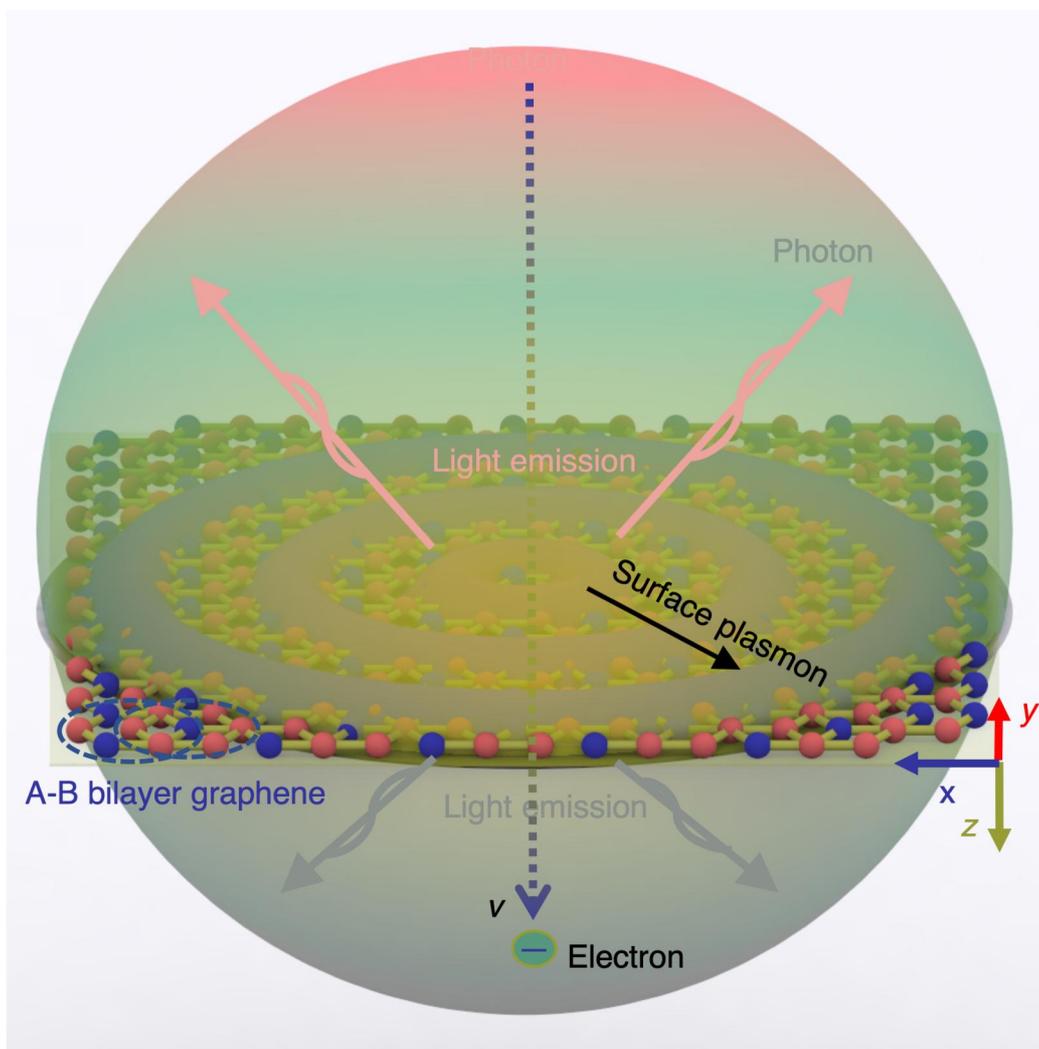


图 3-1 模型示意图：电子以速度 v 垂直入射 2D 材料 AB 型双层石墨烯 ($z = 0$ 平面) 激发远场光子和近场表面等离子激元。

如图 3-1，电子（电荷量为 $q = -e$ ）以恒定速度 v 穿过位于 $z = 0$ 表面电导为 $\sigma_s(\omega)$ 的 A-B 双层石墨烯，介质 1 ($z < 0$) 和介质 2 ($z > 0$) 的相对磁导率和相对介电常数分别为 $\mu_{r,1}$, $\epsilon_{r,1}$ 和 $\mu_{r,2}$, $\epsilon_{r,2}$ ，真空磁导率 μ_0 ，真空介电常数 ϵ_0 ，电荷 q 产生的电流密度为：

$$\vec{J}_z^q(\vec{r}, t) = \hat{z}qv\delta(x)\delta(y)\delta(z - vt) \quad (3-1)$$

在此运动情景中，电磁场对时间是调谐的，在垂直电子轨迹运动方向是均一的，所以将 t , \vec{r}_\perp 作傅立叶变换到 ω , \vec{k}_\perp ：

$$\begin{aligned}
\bar{J}_z^q(\bar{r}, t) &= \int d\omega d\bar{k}_\perp \bar{J}_{\bar{k}_\perp, \omega}^q(z) e^{i\bar{k}_\perp \bar{r}_\perp - i\omega t} \\
\bar{E}(\bar{r}, t) &= \int d\omega d\bar{k}_\perp \bar{E}_{\bar{k}_\perp, \omega}(z) e^{i\bar{k}_\perp \bar{r}_\perp - i\omega t} \\
\bar{H}(\bar{r}, t) &= \int d\omega d\bar{k}_\perp \bar{H}_{\bar{k}_\perp, \omega}(z) e^{i\bar{k}_\perp \bar{r}_\perp - i\omega t}
\end{aligned} \tag{3-2}$$

其中, $\bar{k}_\perp = (k_x, k_y, 0)$, $\bar{r}_\perp = (r_x, r_y, 0)$, 反变换解得:

$$\bar{J}_{\bar{k}_\perp, \omega}^q(z) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int dt d\bar{r}_\perp \hat{z} q v \delta(x) \delta(y) \delta(z - vt) e^{-i\bar{k}_\perp \cdot \bar{r}_\perp + i\omega t} = \hat{z} \frac{q}{(2\pi)^3} e^{i\frac{\omega z}{v}}$$

3.2 电磁场求解

麦克斯韦方程组经典电磁学框架下, 对单各项同性介质 ($\bar{D} = \epsilon \bar{E}$, $\bar{B} = \mu \bar{H}$) 有:

$$\begin{cases}
\nabla \times \bar{E} = i\omega \mu \bar{H} \\
\nabla \times \bar{H} = -i\omega \epsilon \bar{E} + \bar{J} \\
\nabla \cdot \bar{H} = 0 \\
\nabla \cdot \bar{E} = \frac{\rho}{\epsilon}
\end{cases} \tag{3-3}$$

令 $\bar{E}_{\bar{k}_\perp, \omega}(z) = (E_x(z), E_y(z), E_z(z))$, $\bar{E}_z = (0, 0, E_z(z))$, $\bar{E}_s = (E_x(z), E_y(z), 0)$, $\bar{H}_{\bar{k}_\perp, \omega}(z) = (H_x(z), H_y(z), H_z(z))$, $\bar{H}_z = (0, 0, H_z(z))$, $\bar{H}_s = (H_x(z), H_y(z), 0)$, 采用柱波导中“用 E_z, H_z 求出所有场分量”的思想, 把所有场量的求解转化为对 $E_z(z)$, $H_z(z)$ 的求解。

3.2.1 \hat{z} 方向分量亥姆霍兹方程

\hat{z} 方向分量亥姆霍兹方程可对旋度方程求旋度, 利用矢量恒等式 $\nabla \times \nabla \times \bar{A} = (\nabla \nabla) \cdot \bar{A} - \nabla(\nabla \cdot \bar{A})$ 并联立麦克斯韦方程得出, 但为说明纵向分量 \bar{E}_z , \bar{H}_z 与横向分量 \bar{E}_s , \bar{H}_s 的关系, 下给出另一求解方式, 改写两个旋度方程为:

$$\left(\nabla_s + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (\bar{E}_s + \bar{E}_z) = i\omega \mu (\bar{H}_s + \bar{H}_z) \tag{3-4}$$

$$\left(\nabla_s + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (\bar{H}_s + \bar{H}_z) = -i\omega \epsilon (\bar{E}_s + \bar{E}_z) + (\bar{J}_z + \bar{J}_s) \tag{3-5}$$

分离纵向和横向分量, 得:

$$i\omega \mu \bar{H}_s = \nabla_s \times \bar{E}_z + \hat{z} \times \frac{\partial}{\partial z} \bar{E}_s \tag{3-6}$$

$$-i\omega \epsilon \bar{E}_s + \bar{J}_s = \nabla_s \times \bar{H}_z + \hat{z} \times \frac{\partial}{\partial z} \bar{H}_s \tag{3-7}$$

$$i\omega \mu \bar{H}_z = \nabla_s \times \bar{E}_s \tag{3-8}$$

$$-i\omega \epsilon \bar{E}_z + \bar{J}_z = \nabla_s \times \bar{H}_s \tag{3-9}$$

$\left(\frac{1}{i\omega \mu} \hat{z} \times \frac{\partial}{\partial z} \right)$ 作用于式(3-6), 并加上(3-7)消去 $\hat{z} \times \frac{\partial}{\partial z} \bar{H}_s$, 得: $-i\omega \epsilon \bar{E}_s + \bar{J}_s = \nabla_s \times \bar{H}_s + \left(\frac{1}{i\omega \mu} \hat{z} \times \frac{\partial}{\partial z} \right) (\nabla_s \times \bar{E}_z) + \left(\frac{1}{i\omega \mu} \hat{z} \times \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\hat{z} \times \frac{\partial}{\partial z} \bar{E}_s \right)$, 利用 $\hat{z} \times (\nabla_s \times \bar{E}_z) = \nabla_s E_z$ 和 $\hat{z} \times (\hat{z} \times \bar{E}_s) = -\bar{E}_s$ 化简得 \bar{E}_s , \bar{E}_s 代入(3-6)得 \bar{H}_s , 如下:

$$\bar{E}_s = \frac{i\omega\mu(\nabla_s \times \bar{H}_z - \bar{J}_s) + \nabla_s \frac{\partial}{\partial z} E_z}{\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \omega^2\mu\epsilon} \quad (3-10)$$

$$\bar{H}_s = \frac{-i\omega\epsilon\nabla_s \times \bar{E}_z - \hat{z} \times \frac{\partial \bar{J}_s}{\partial z} + \nabla_s \frac{\partial H_z}{\partial z}}{\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \omega^2\mu\epsilon} \quad (3-11)$$

至此，本文得到了用纵向分量表达横向分量的关系式(3-10)与(3-11)，分别代入(3-8)，(3-9)得 \hat{z} 方向场满足的亥姆霍兹方程：

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \omega^2\mu\epsilon + \nabla_s^2 \right) \begin{pmatrix} E_z \\ H_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \omega^2\mu\epsilon \right] \frac{J_z}{i\omega\epsilon} - \nabla_s \cdot \frac{\partial \bar{J}_s}{\partial z} \\ - \frac{\nabla_s \cdot \frac{\partial \bar{J}_s}{\partial z}}{i\omega\mu} \end{pmatrix} \quad (3-12)$$

由 $J_s = 0$ 知 $H_z = 0$ ，值得注意的是，数学角度上 H_z 只有齐次解，系数可以取任意值，违背了唯一性定理。所以从物理上看， H_z 齐次解对应的双层石墨烯的一种本征模式（TE模）是未被激发的，所以取 $H_z = 0$ 。对 E_z ，由式(3-2)平面波展开知： $\nabla_s = (ik_x, ik_y, 0)$ ，则，可化简 E_z 满足的亥姆霍兹方程：

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} E_z + \left(\frac{\omega^2}{c^2} \mu_r \epsilon_r - k_{\perp}^2 \right) E_z = \frac{iq\omega\mu}{(2\pi)^3} \left(\frac{c^2}{v^2 \epsilon_r \mu_r} - 1 \right) \quad (3-13)$$

齐次解为：

$$E_{z,m}^R = \frac{iq}{\omega\epsilon_0 (2\pi)^3} a_m e^{i(-1)^m \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \mu_{r,m} \epsilon_{r,m} - k_{\perp}^2} z} \quad (3-14)$$

$E_z^{R,m}$ 表示介质 m 中电场强度， $\mu_{r,m}$ ， $\epsilon_{r,m}$ 分别为介质指数 m 中磁导率，相对介电常数， m 可取1、2。 $(-1)^m$ 约束了电磁波传播方向，介质1（ $z < 0$ ）中朝 $-z$ 方向传播，介质2（ $z > 0$ ）中朝 $+z$ 方向传播；

非齐次解：

$$E_z^q = \frac{iq\omega\mu \left(\frac{c^2}{v^2 \epsilon_r \mu_r} - 1 \right)}{(2\pi)^3 \left(\frac{\omega^2}{c^2} \mu_r \epsilon_r - k_{\perp}^2 - \frac{\omega^2}{v^2} \right)} e^{i\frac{\omega}{v} z} \quad (3-15)$$

E_z^q 为电荷 q 感应产生的电场，即切伦科夫辐射的电场。

3.2.2 边界条件匹配

下通过匹配边界条件确定系数 a_m ，由相位匹配（动量守恒）得 $\bar{k}_{\perp 1} = \bar{k}_{\perp 2} = \bar{k}_{\perp}$ ，取 $\hat{n} = -\hat{z}$ ，有： $\hat{n} \times (\bar{H}_{12} - \bar{H}_{11}) = \sigma_s \bar{E}_{11}$ 且 $(\bar{E}_{12} - \bar{E}_{11}) = 0$ （即 $\hat{n} \times (\bar{E}_{12} - \bar{E}_{11}) = 0$ ）。等式两边点积 $i\bar{k}_{\perp}$ ，并利用 $\nabla_s = (i\bar{k}_{\perp}, 0)$ 替换，观察恒等式 $(\nabla \times \bar{H}_j)_z = i\bar{k}_{\perp} \cdot (\hat{n} \times \bar{H}_j)$ 得： $\nabla_s \cdot (\bar{E}_{12} - \bar{E}_{11}) = 0$ 且 $(\nabla \times (\bar{H}_1 - \bar{H}_2))_z = \nabla_s \cdot \bar{E}_{11}$ ，利用麦克斯韦方程组得到，在 $z = 0$ ：

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{J_z}{i\omega\epsilon_1} - E_{z,1} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{J_z}{i\omega\epsilon_2} - E_{z,2} \right) \quad (3-16)$$

$$(-i\omega\epsilon_1 E_{z,1} + J_z) - (-i\omega\epsilon_2 E_{z,2} + J_z) = \sigma_s \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{J_z}{i\omega\epsilon_1} - E_{z,1} \right) \quad (3-17)$$

代入 $E_{z,1}, E_{z,2}, J_z$ ，解二元一次方程组可得：

$$a_1 = \frac{\frac{v}{c} \cdot \frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega^2 \epsilon_{r,1}} (\epsilon_{r,2} - \epsilon_{r,1}) \left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \epsilon_{r,1} + \frac{v}{c} \sqrt{\epsilon_{r,2} - \frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega^2}} \right) + \frac{\sigma_s}{c \epsilon_0 (\epsilon_{r,2} - \epsilon_{r,1})} \sqrt{\epsilon_{r,2} - \frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega^2}} \left(1 + \frac{v}{c} \sqrt{\epsilon_{r,2} - \frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega^2}} \right) \right]}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \epsilon_{r,1} + \frac{k_{\perp}^2 v^2}{\omega^2} \right) \left(1 + \frac{v}{c} \sqrt{\epsilon_{r,2} - \frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega^2}} \right) \left[\epsilon_{r,1} \sqrt{\epsilon_{r,2} - \frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega^2}} + \epsilon_{r,2} \sqrt{\epsilon_{r,1} - \frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega^2}} + \frac{\sigma_s}{c \epsilon_0} \sqrt{\epsilon_{r,1} - \frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega^2}} \cdot \sqrt{\epsilon_{r,2} - \frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega^2}} \right]} \quad (3-18)$$

$$a_2 = \frac{\frac{v}{c} \cdot \frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega^2 \epsilon_{r,2}} (\epsilon_{r,2} - \epsilon_{r,1}) \left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \epsilon_{r,2} - \frac{v}{c} \sqrt{\epsilon_{r,1} - \frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega^2}} \right) - \frac{\sigma_s}{c \epsilon_0 (\epsilon_{r,2} - \epsilon_{r,1})} \sqrt{\epsilon_{r,1} - \frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega^2}} \left(1 + \frac{v}{c} \sqrt{\epsilon_{r,1} - \frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega^2}} \right) \right]}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \epsilon_{r,2} + \frac{k_{\perp}^2 v^2}{\omega^2} \right) \left(1 - \frac{v}{c} \sqrt{\epsilon_{r,1} - \frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega^2}} \right) \left[\epsilon_{r,1} \sqrt{\epsilon_{r,2} - \frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega^2}} + \epsilon_{r,2} \sqrt{\epsilon_{r,1} - \frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega^2}} + \frac{\sigma_s}{c \epsilon_0} \sqrt{\epsilon_{r,1} - \frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega^2}} \cdot \sqrt{\epsilon_{r,2} - \frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega^2}} \right]} \quad (3-19)$$

值得说明的是，由于运动的对称性， a_1 与 a_2 存在 $\epsilon_{r,2} \leftrightarrow \epsilon_{r,1}$ ， $\mu_{r,2} \leftrightarrow \mu_{r,1}$ ， $v \leftrightarrow -v$ 的对偶关系，解得 a_1 后通过对偶关系得出 a_2 。

3.2.3 柱坐标下的场量形式

至此得到 ω ， \bar{k}_{\perp} 域 E_z 的解析解，代入傅立叶反变换，可得时域场，即：

$$\bar{E}_{z,m}^R(\bar{r}, t) = \hat{z} \int d\omega d\bar{k}_{\perp} \frac{iq}{\omega \epsilon_0 (2\pi)^3} a_m e^{i(-1)^m \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \mu_{r,m} \epsilon_{r,m} - k_{\perp}^2} z} e^{i\bar{k}_{\perp} \bar{r}_{\perp} - i\omega t} \quad (3-20)$$

由 $\int d\bar{k}_{\perp} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} k_{\perp} dk_{\perp}$ ， $\bar{r}_{\perp} = (r_{\perp} \cos \phi, r_{\perp} \sin \phi)$ ， $\bar{k}_{\perp} = (k_{\perp} \cos \theta, k_{\perp} \sin \theta)$ ，代入得：

$$\bar{E}_{z,m}^R(\bar{r}, t) = \hat{z} \int d\omega \int_0^{\infty} dk_{\perp} \frac{iq}{\omega \epsilon_0 (2\pi)^3} a_m e^{i(-1)^m \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \mu_{r,m} \epsilon_{r,m} - k_{\perp}^2} z - i\omega t} \times \int_0^{2\pi} d\theta e^{ik_{\perp} r_{\perp} \cos(\theta - \phi)} \quad (3-21)$$

利用第一类贝塞尔函数积分定义式 $\int_0^{2\pi} d\theta e^{ik_{\perp} r_{\perp} \cos \theta} = 2\pi J_0(k_{\perp} r_{\perp})$ ，以及 ϕ 的旋转对称性，不妨取 $\phi = 0$ ，得：

$$\bar{E}_{z,m}^R(\bar{r}, t) = \hat{z} \int d\omega \int_0^{\infty} dk_{\perp} \frac{iq}{\omega \epsilon_0 (2\pi)^3} a_m (2\pi J_0(k_{\perp} r_{\perp})) e^{i(-1)^m \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \mu_{r,m} \epsilon_{r,m} - k_{\perp}^2} z - i\omega t} \quad (3-22)$$

由于本问题的柱对称性，在柱坐标 (ρ, ϕ, z) 下表示所有场量，上式代入(3-10)，(3-11)，

$$\text{利用 } \nabla_s \Phi = \hat{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \hat{\phi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi}, \quad \nabla_s \times \bar{H} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho \hat{\phi} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_{\rho} & \rho H_{\phi} & H_z \end{vmatrix}, \quad \frac{dJ_0(k_{\perp} \rho)}{d\rho} = -k_{\perp} J_1(k_{\perp} \rho), \quad \text{得：}$$

$$\bar{H}_m^R(\bar{r}, t) = \hat{\phi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_0^{\infty} dk_{\perp} \frac{iq}{\omega \epsilon_0 (2\pi)^3} a_m (-\omega \epsilon_0 \epsilon_{r,m}) (i2\pi J_1(k_{\perp} \rho)) \times e^{i(-1)^m \left(\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \mu_{r,m} \epsilon_{r,m} - k_{\perp}^2} \right) z - i\omega t} \quad (3-23)$$

$$\bar{E}_m^R(\bar{r}, t) = \hat{\rho} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_0^{\infty} dk_{\perp} \frac{iq a_m (-1)^{m+1}}{\omega \epsilon_0 (2\pi)^3} \left(\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \mu_{r,m} \epsilon_{r,m} - k_{\perp}^2} \right) (i2\pi J_1(k_{\perp} \rho)) \times e^{i(-1)^m \left(\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \mu_{r,m} \epsilon_{r,m} - k_{\perp}^2} \right) z - i\omega t} + \hat{z} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_0^{\infty} dk_{\perp} \frac{iq}{\omega \epsilon_0 (2\pi)^3} \times a_m (2\pi k_{\perp} J_0(k_{\perp} \rho)) e^{i(-1)^m \left(\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \mu_{r,m} \epsilon_{r,m} - k_{\perp}^2} \right) z - i\omega t} \quad (3-24)$$

其中, $\mu_{r,m}$ 和 $\epsilon_{r,m}$ 分别为介质指数 m 中磁导率和相对介电常数, m 可取 1、2。同理, 求解切伦科夫辐射, 作反变换:

$$\bar{E}_z^q(\bar{r}, t) = \hat{z} \int d\omega d\bar{k}_\perp \frac{iq\omega\mu \left(\frac{c^2}{v^2\epsilon_r\mu_r} - 1 \right)}{(2\pi)^3 \left(\frac{\omega^2}{c^2}\mu_r\epsilon_r - k_\perp^2 - \frac{\omega^2}{v^2} \right)} e^{i\frac{\omega}{v}z} e^{i\bar{k}_\perp\bar{r}_\perp - i\omega t} \quad (3-25)$$

当 $1 - \frac{c^2}{v^2\epsilon_r\mu_r} > 0$, 即: $v > \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r\mu_r}}$ 时 (此条件为切伦科夫辐射的速度阈值条件), 上式被积函数在 $k_\perp = \frac{\omega}{c}\sqrt{\mu_r\epsilon_r}\sqrt{1 - \frac{c^2}{v^2\epsilon_r\mu_r}}$ 存在极点, 可通过索末菲积分求解, 下直接给出结果, 如何构造索末菲积分路径以及上式的化简过程在下一小节给出。

$$\bar{H}_m^q(\bar{r}, t) = \hat{\rho} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{iq}{8\pi} \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_{r,m}\mu_{r,m} - \frac{\omega^2}{v^2}} H_1^{(1)} \left(\rho \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_{r,m}\mu_{r,m} - \frac{\omega^2}{v^2}} \right) e^{i\frac{\omega}{v}z - \omega t} \quad (3-26)$$

$$\begin{aligned} \bar{E}_m^q(\bar{r}, t) &= \hat{\rho} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{q}{8\pi\omega\epsilon_0\epsilon_{r,m}} \left(i\frac{\omega}{v} \right) \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_{r,m}\mu_{r,m} - \frac{\omega^2}{v^2}} \times \\ &H_1^{(1)} \left(\rho \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_{r,m}\mu_{r,m} - \frac{\omega^2}{v^2}} \right) e^{i\frac{\omega}{v}z - \omega t} + \hat{z} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{-q}{8\pi\omega\epsilon_0\epsilon_{r,m}} \left(\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_{r,m}\mu_{r,m} - \frac{\omega^2}{v^2} \right) \times \\ &H_0^{(1)} \left(\rho \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_{r,m}\mu_{r,m} - \frac{\omega^2}{v^2}} \right) e^{i\frac{\omega}{v}z - \omega t} \end{aligned} \quad (3-27)$$

$$\bar{E}_m(\bar{r}, t) = \bar{E}_m^q(\bar{r}, t) + \bar{E}_m^R(\bar{r}, t), \quad \bar{H}_m(\bar{r}, t) = \bar{H}_m^q(\bar{r}, t) + \bar{H}_m^R(\bar{r}, t) \quad (3-28)$$

综上(3-23), (3-24), (3-26), (3-27)和(3-28)式, 本文得出了所有场分量的解。

3.2.4 索末菲积分

观察式(3-23)-(3-24), k_\perp 沿着实轴积分, 被积函数在 $\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\epsilon_{r,2} + \frac{k_\perp^2 v^2}{\omega^2}\right) \left(1 - \frac{k_\perp^2 c^2}{\omega^2\epsilon_r\mu_r} - \frac{c^2}{v^2\epsilon_r\mu_r}\right) = 0$, $\left[\epsilon_{r,1}\sqrt{\epsilon_{r,2} - \frac{k_\perp^2 c^2}{\omega^2}} + \epsilon_{r,2}\sqrt{\epsilon_{r,1} - \frac{k_\perp^2 c^2}{\omega^2}} + \frac{\sigma_s}{c\epsilon_0}\sqrt{\epsilon_{r,1} - \frac{k_\perp^2 c^2}{\omega^2}} \cdot \sqrt{\epsilon_{r,2} - \frac{k_\perp^2 c^2}{\omega^2}}\right] = 0$ 处分母为0, 数学上无意义, 但引入独特的物理结构, 使得本文能够在特殊的复变路径上积分数值求解。如经典的索末菲定义式通过规避极点得到球面波的柱面波 (或平面波) 展开, (幅值为 $\frac{k_\rho}{k_z} e^{ik_z|z|}$ 的柱面波 $H_0^{(1)}(k_\rho\rho)$, 也可以理解为幅值为 $\frac{k_\rho}{k_z} H_0^{(1)}(k_\rho\rho)$ 的平面波 $e^{ik_z|z|}$):

$$\frac{e^{ik_z|z|}}{r} = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dk_\rho \frac{k_\rho}{k_z} H_0^{(1)}(k_\rho\rho) e^{ik_z|z|} \quad (3-29)$$

其中 $k_z = \sqrt{(k_0^2 - k_\rho^2)}$ 。

此处本文沿用式(3-29)的思路化简(3-25), 对非磁介质 $\mu = \mu_0$, $\mu_r = 1$, 有:

$$\begin{aligned}
\bar{E}_z^q(\vec{r}, t) &= \hat{z} \int d\omega \int_0^\infty dk_\perp \frac{iq\omega\mu \left(\frac{c^2}{v^2\epsilon_r\mu_r} - 1 \right)}{(2\pi)^3 \left(\frac{\omega^2}{c^2}\mu_r\epsilon_r - k_\perp^2 - \frac{\omega^2}{v^2} \right)} e^{i\frac{\omega}{v}z - i\omega t} \int_0^{2\pi} d\theta e^{ik_\perp\rho \cos(\theta-\phi)} \\
&= \hat{z} \int d\omega e^{i\frac{\omega}{v}z - i\omega t} \int_0^\infty dk_\perp \frac{iq}{\omega\epsilon_0\epsilon_r(2\pi)^3} \cdot \frac{\left(\frac{c^2}{v^2\epsilon_r\mu_r} - 1 \right)}{\left(1 - \frac{k_\perp^2 c^2}{\omega^2\epsilon_r\mu_r} - \frac{c^2}{v^2\epsilon_r\mu_r} \right)} (2\pi k_\perp J_0(k_\perp\rho)) \\
&= \hat{z} \int d\omega e^{i\frac{\omega}{v}z - i\omega t} \int_0^\infty dk_\perp \frac{iq}{\omega\epsilon_0\epsilon_r(2\pi)^3} \cdot \frac{k_{\rho,q}^2 k_\perp}{k_\perp^2 - k_{\rho,q}^2} (2\pi J_0(k_\perp\rho))
\end{aligned}$$

其中 $k_{\rho,q} = \sqrt{\left(\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_r - \frac{\omega^2}{v^2} \right)}$, 令 $SI(\omega, \rho) = \int_0^\infty dk_\perp \frac{k_{\rho,q}^2 k_\perp}{k_\perp^2 - k_{\rho,q}^2} (2\pi J_0(k_\perp\rho))$, 则:

$$\bar{E}_z^q(\vec{r}, t) = \hat{z} \int d\omega e^{i\frac{\omega}{v}z - i\omega t} \frac{iq}{\omega\epsilon_0\epsilon_r(2\pi)^3} \cdot SI(\omega, \rho) \quad (3-30)$$

化简 $SI(\omega, r_\perp) = \int_0^\infty dk_\perp \frac{k_{\rho,q}^2 k_\perp}{k_\perp^2 - k_{\rho,q}^2} \pi [H_0^{(1)}(k_\perp\rho) + H_0^{(2)}(k_\perp\rho)]$, 由汉克尔函数反射关系: $(-1)H_0^{(1)}(e^{i\pi}x) = H_0^{(2)}(x)$, 得:

$$SI(\omega, \rho) = \int_{-\infty}^\infty dk_\perp \frac{k_{\rho,q}^2 k_\perp}{k_\perp^2 - k_{\rho,q}^2} \pi H_0^{(1)}(k_\perp\rho) \quad (3-31)$$

当 $k_{\rho,q} \in \mathcal{R}_+$ 即: $v > c/\sqrt{\epsilon_r}$, 在实轴 $k_\perp = \pm k_{\rho,q}$ 处产生极点。为介质引入极小损耗得: $k_{\rho,q} = k_{\rho,q,R} + ik_{\rho,q,I}$, 即 $k_{\rho,q,R}, k_{\rho,q,I} \in \mathcal{R}_+$, $k_{\rho,q,I} \rightarrow 0^+$, 得积分路径如图 3-2(a)所示:

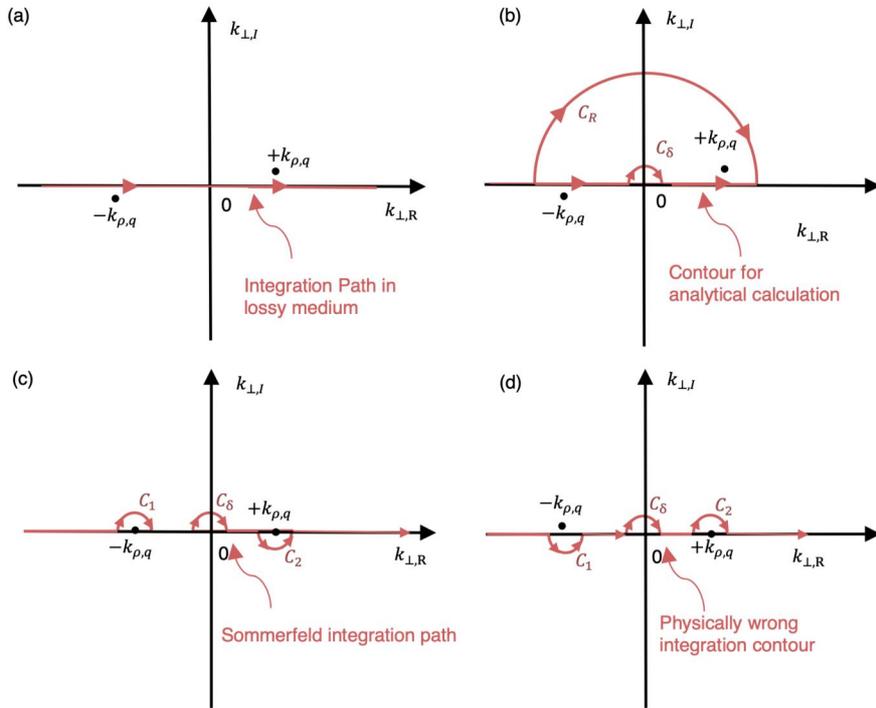


图 3-2 索末菲积分路径 (Sommerfeld integration path, SIP)。(a)有损媒介的积分路径; (b)有损媒介利用留数定理解析求解; (c)无损材料索末菲积分求数值解; (d)不符合辐射条件的积分路径。

本例特殊的是，被积函数在 $\left(\frac{\omega^2}{c^2} \mu_r \epsilon_r - k_{\perp}^2 - \frac{\omega^2}{v^2}\right) = 0$ 处极点为一阶（整数阶），在有损介质中可以求得解析解，但并非所有极点都可用留数定理进行处理。但基于本例，不难得出只要指定符合物理情景的积分路径，不论极点的类型，都可数值计算得出符合索末菲辐射条件的解。以索末菲定义式(3-27)为例，一般形式下的索末菲积分路径如图3-3所示，不赘述推导过程^[52]。

3.3 电磁场分布

区域1与区域2介质参数取 $\epsilon_{r,1} = \epsilon_{r,2} = 1$ ， $\mu_{r,1} = \mu_{r,2} = 1$ ，参数可简化

$$a = a_1 = -a_2 = \frac{\frac{v}{c} \cdot \frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega^2 \epsilon_r} \cdot \frac{\sigma_S}{c \epsilon_0}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \epsilon_r + \frac{k_{\perp}^2 v^2}{\omega^2}\right) \left(2 \epsilon_r + \frac{\sigma_S}{c \epsilon_0} \sqrt{\epsilon_r - \frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega^2}}\right)} \quad (3-34)$$

本节本文关心在增益峰（47.1THz）与吸收峰（96.7THz）处的场分布，数值计算结果如下图：

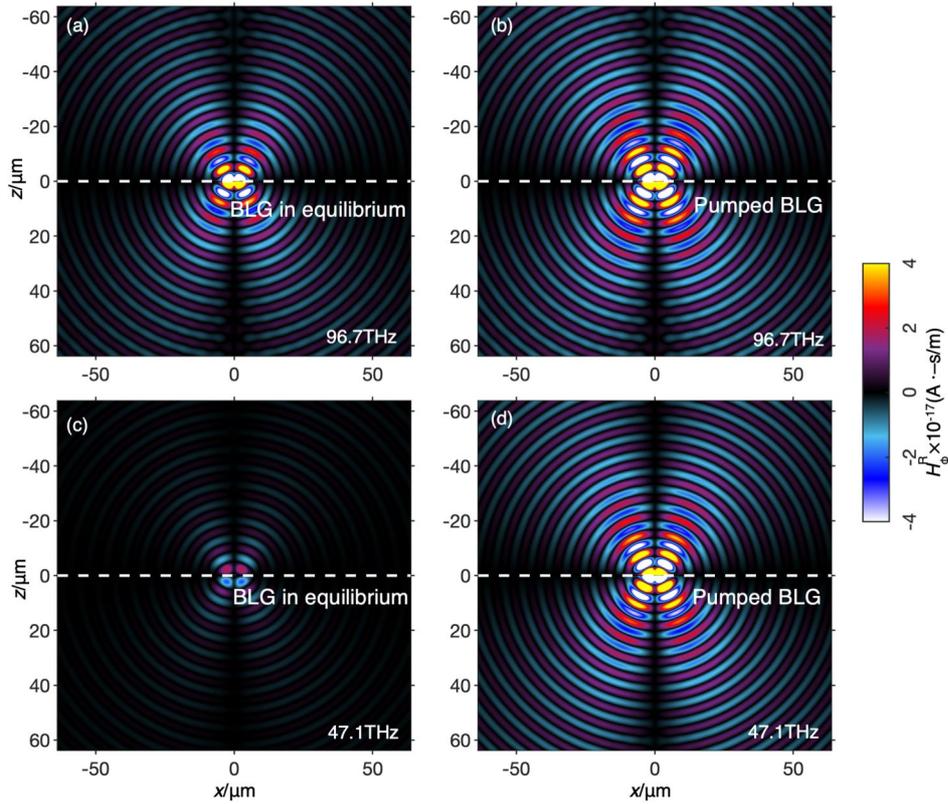


图 3-4 光激发前后场分布，粒子速度为 $0.9c$ ，双层石墨烯参数与图 2-4 一致。(a)96.7THz，平衡态双层石墨烯；(b)96.7THz，光激发双层石墨烯；(c)47.1THz，平衡态双层石墨烯；(d)47.1THz，光激发双层石墨烯。

综上，本文给出了电磁场量的解析形式，并数值求解得出了场图，不难看出光掺杂后（尤其在增益峰 47.1THz 处）的磁场强度要强于平衡态的磁场强度，这个结论是平庸的，为进一步定量探究渡越辐射的方向性、强度特性，需要进一步对辐射能量进行研究。

3.4 本章小节

本章延续了诺贝尔物理学奖得主 Vitaly Ginzburg 教授在 1973 年^[1]提出的渡越辐射的一般模型，利用平面波展开法对电磁场量进行处理，进而匹配边界条件解析求得 \mathbf{k}_\perp 空间, ω 域下的电磁场分布。

不同的是，本文电磁模型中在二维界面处引入了新型人工二维材料双层石墨烯进行修饰，并且更进一步对地给了柱坐标系时域场和实际空间中的电磁场量，通过索末菲数值积分给出单频点场图。此外，本章深入探讨了将电磁场量化归为其纵向分量的合理性，并且系统阐述了在电磁辐射中如何利用索末菲积分对积分极点进行规避，并以切伦科夫辐射为例，创新地利用平面波展开法结合索末菲路径解析计算了切伦科夫辐射场。

第四章 远场：光子辐射

站在电磁波角度分析， $k_z = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \mu_{r,m} \epsilon_{r,m} - k_\perp^2}$ ，当 $k_\perp > \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_r}$ 时， k_z 是纯虚数，电磁场在 z 方向是倏逝的；当 $k_\perp < \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_r}$ 时，电磁波为辐射波可传播到远场，从粒子角度看，远、近场能量的辐射形式分别为光子与表面等离激元。本章在 $k_\perp > \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_r}$ 条件下研究远场辐射，第一小节解析求解远场光子辐射的角谱能量；第二小节数值计算辐射的强度与定向性。

4.1 能量角谱与能谱

定义后向（前向）能量角谱为 $U_1(\omega, \theta, \beta)$ （ $U_2(\omega, \theta, \beta)$ ），满足：

$$W_m = \int_0^{+\infty} d\omega w_m(\omega) = \int_0^{+\infty} d\omega \int_0^{2\pi} d\theta U_m(\omega, \theta, \beta) \cdot (2\pi \sin\theta) \quad (4-1)$$

其中， θ 表示波矢 \bar{k} 与速度 \bar{v} 方向夹角， β 表示归一化速度 v/c ， ω 为角频率。以后向辐射为例，自由空间电磁能量为：

$$W_1 = \epsilon_r \lim_{t \rightarrow \infty} \int d\bar{r} |\bar{E}_1^R(\bar{r}, t)|^2 = \epsilon_r \lim_{t \rightarrow \infty} \int d\bar{r}_\perp \int_{-\infty}^{\infty} dz |\bar{E}_1^R(\bar{r}, t)|^2 \quad (4-2)$$

上式中要求 $k_\perp < \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_r}$ ，即电磁波是辐射场，并且材料无色散，因此磁场能量与电场能量相等。这里令 $t \rightarrow \infty$ 而并不是对 t 在 $(-\infty, +\infty)$ 积分，值得注意的是，这是因为在 $t \rightarrow \infty$ 时，辐射场波列远离双层石墨烯，与电荷场 E^q 剥离。

结合(3-2)式平面波展开式：

$$|\bar{E}(\bar{r}, t)|^2 = \epsilon_r \left[\int d\omega d\bar{k}_\perp \bar{E}_{\bar{k}_\perp, \omega, 1}^R(z) e^{i\bar{k}_\perp \bar{r}_\perp - i\omega t} \right] \cdot \left[\int d\omega' d\bar{k}'_\perp \bar{E}_{\bar{k}'_\perp, \omega', 1}^R(z) e^{i\bar{k}'_\perp \bar{r}_\perp - i\omega' t} \right]^* \quad (4-3)$$

代入得(4-2)，先对 \bar{r}_\perp 积分，利用 $\int d\bar{r}_\perp e^{i\bar{k}_\perp \bar{r}_\perp - i\bar{k}'_\perp \bar{r}_\perp} = (2\pi)^2 \delta(\bar{k}_\perp - \bar{k}'_\perp)$ 可得：

$$W_1 = (2\pi)^2 \epsilon_r \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \int d\bar{k}_\perp \bar{E}_{\bar{k}_\perp, \omega, 1}^R(z) \left[\bar{E}_{\bar{k}_\perp, \omega', 1}^R(z) \right]^* e^{-i\omega t + i\omega' t} \quad (4-4)$$

实际上，由式(4-2)到式(4-4)可直接由帕塞瓦尔定理推出。为简化计算，令 $W_1 = W_{1,z} + W_{1,\perp}$ ，将 $\bar{E}_{\bar{k}_\perp, \omega, 1}^R(z) = \frac{iq}{\omega \epsilon_0 (2\pi)^3} a_{\bar{k}_\perp, \omega, 1} e^{-i\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_r - k_\perp^2} z}$ 代入式(4-4)，先对 z 在 $(-\infty, +\infty)$ 积分，由 $\delta(f(x) - y) = \frac{\delta(x - x_0)}{f'(x)} \Big|_{f(x_0)=y}$ 知：

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-i\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_r - k_\perp^2} z} e^{+i\sqrt{\frac{\omega'^2}{c^2} \epsilon_r - k_\perp^2} z} = (2\pi) \left[\delta(\omega - \omega') \frac{\frac{\sqrt{\epsilon_r}}{c}}{\sqrt{1 - \frac{k_\perp^2 c^2}{\omega^2 \epsilon_r}}} \right] \quad (4-5)$$

代入(4-4)得：

$$W_{1,z} = \epsilon_r \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int d\bar{k}_{\perp} \frac{q^2}{\omega^2 \epsilon_0^2 (2\pi)^3} |a_1|^2 \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} \sqrt{1 - \frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega^2 \epsilon_r}} \quad (4-6)$$

$$\text{由式(3-10)得: } W_{1,\perp} = W_{1,z} \cdot \left[\frac{v_s \left(-i \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_r - k_{\perp}^2} \right)}{\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_r - \left(\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_r - k_{\perp}^2} \right)^2} \right]^2 = W_{1,z} \cdot \left[\frac{ik_{\perp} \left(-i \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_r - k_{\perp}^2} \right)}{k_{\perp}^2} \right]^2 = W_{1,z} \cdot$$

$\left(\frac{\omega^2}{k_{\perp}^2 c^2} \epsilon_r - 1 \right)$, 则:

$$W_{1,\perp} = \epsilon_r \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int d\bar{k}_{\perp} \frac{q^2}{\omega^2 \epsilon_0^2 (2\pi)^3} |a_1|^2 \left(\frac{\omega^2}{k_{\perp}^2 c^2} \epsilon_r - 1 \right) \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} \sqrt{1 - \frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega^2 \epsilon_r}} \quad (4-7)$$

从而易得:

$$W_1 = \epsilon_r \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int d\bar{k}_{\perp} \frac{q^2}{\omega^2 \epsilon_0^2 (2\pi)^3} |a_1|^2 \frac{\omega^2}{k_{\perp}^2 c^2} \epsilon_r \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} \sqrt{1 - \frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega^2 \epsilon_r}} \quad (4-8)$$

由远场 $k_{\perp} < \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_r}$, 可定义 $k_{\perp} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_r} \sin \theta$, 代换 $d\bar{k}_{\perp} = 2\pi k_{\perp} dk_{\perp} d\theta$, 整理(4-8)得:

$$W_1 = \int_0^{+\infty} d\omega \int_0^{\pi/2} d\theta \frac{\epsilon_r^{3/2} q^2 \cos^2 \theta |a_1|^2}{4\pi^3 \epsilon_0 c \sin^2 \theta} \cdot (2\pi \sin \theta) \quad (4-9)$$

恒等比较式(4-1),(4-9), 得前后向角谱为:

$$U_1(\omega, \theta, \beta) = \frac{\epsilon_r^{3/2} q^2 \cos^2 \theta |a_1|^2}{4\pi^3 \epsilon_0 c \sin^2 \theta} \quad (4-10)$$

由模型中 $\epsilon_{r,1} = \epsilon_{r,2} = 1$, $\mu_{r,1} = \mu_{r,2} = 1$, 得前向角谱为: $U_2(\omega, \theta, \beta) = U_1(\omega, \theta, \beta)$. 后向能量谱为:

$$w_1(\omega) = \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\epsilon_r^{3/2} q^2 \cos^2 \theta |a_2|^2}{4\pi^3 \epsilon_0 c \sin^2 \theta} (2\pi \sin \theta) \quad (4-11)$$

前向能量谱 $w_2(\omega) = w_1(\omega)$. 总能谱为: $w(\omega) = w_1(\omega) + w_2(\omega) = 2w_1(\omega)$.

4.2 解析及数值结果

4.2.1 解析解

$$\text{化简式(3-18), (3-19), } a(\omega, \theta, \beta) = a_1 = a_2 = \frac{\beta \cdot \sin^2 \theta \cdot \frac{\sigma_S}{c\epsilon_0}}{(1 - \beta^2 \epsilon_r + \beta^2 \epsilon_r \sin^2 \theta) \left(2\epsilon_r + \frac{\sigma_S}{c\epsilon_0} \sqrt{\epsilon_r - \epsilon_r \sin^2 \theta} \right)} =$$

$$\frac{\beta \cdot \sin^2 \theta \cdot \frac{\sigma_S}{c\epsilon_0}}{(1 - \beta^2 \epsilon_r \cos^2 \theta) \left(2\epsilon_r + \frac{\sigma_S}{c\epsilon_0} \sqrt{\epsilon_r} \cos \theta \right)}, \text{ 代入(4-10), 得:}$$

$$U_1(\omega, \theta, \beta) = \frac{\epsilon_r^{3/2} q^2 \cos^2 \theta}{4\pi^3 \epsilon_0 c \sin^2 \theta} \left| \frac{\beta \cdot \sin^2 \theta \cdot \frac{\sigma_S}{c\epsilon_0}}{(1 - \beta^2 \epsilon_r \cos^2 \theta) \left(2\epsilon_r + \frac{\sigma_S}{c\epsilon_0} \sqrt{\epsilon_r} \cos \theta \right)} \right|^2 \quad (4-12)$$

整理得:

$$\begin{aligned}
U_1(\omega, \theta, \beta) &= \frac{\varepsilon_r^{3/2} q^2 \beta^2 \left| \frac{\sigma_S}{c\varepsilon_0} \right|^2}{4\pi^3 \varepsilon_0 c} \cdot \left| \frac{\sin\theta \cdot \cos\theta}{(1 - \beta^2 \varepsilon_r \cos^2 \theta) \left(2\varepsilon_r + \frac{\sigma_S}{c\varepsilon_0} \sqrt{\varepsilon_r} \cos\theta \right)} \right|^2 \\
&= \frac{\varepsilon_r^{3/2} q^2 \beta^2 \left| \frac{\sigma_S}{c\varepsilon_0} \right|^2}{4\pi^3 \varepsilon_0 c} \cdot \frac{\frac{\sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta}{(1 - \beta^2 \varepsilon_r \cos^2 \theta)^2}}{\left[\left(2\varepsilon_r + \frac{\sigma_{S,R}}{c\varepsilon_0} \sqrt{\varepsilon_r} \cos\theta \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{S,I}}{c\varepsilon_0} \sqrt{\varepsilon_r} \cos\theta \right)^2 \right]} \\
&= \frac{\varepsilon_r^{3/2} q^2 \beta^2 \left| \frac{\sigma_S}{c\varepsilon_0} \right|^2}{4\pi^3 \varepsilon_0 c} \cdot \frac{\frac{\sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta}{(1 - \beta^2 \varepsilon_r \cos^2 \theta)^2}}{\left[4\varepsilon_r \left(\varepsilon_r + \frac{\sigma_{S,R}}{c\varepsilon_0} \sqrt{\varepsilon_r} \cos\theta \right) + \left| \frac{\sigma_S}{c\varepsilon_0} \right|^2 \cos^2 \theta \right]}
\end{aligned} \quad (4-13)$$

由上式分母中易知角谱强度与光导实部 $\sigma_{S,R}$ 的符号相关，而由 $\left(\frac{\sigma_{S,I}}{c\varepsilon_0} \sqrt{\varepsilon_r} \cos\theta \right)^2$ 可知，光导虚部 $\sigma_{S,I}$ 的符号并不影响角谱能量大小。但要解析求得上述的极值分布是困难的。下面本文关心特殊情形下的解析解，并对一般情景进行数值求解。

特殊地，当 $\beta \rightarrow 1$ 时，有： $U_1(\omega, \theta, \beta) = \frac{q^2 \left| \frac{\sigma_{S,I}}{c\varepsilon_0} \right|^2}{4\pi^3 \varepsilon_0 c \cdot \tan^2 \theta \left[4 \left(1 + \frac{\sigma_{S,R}}{c\varepsilon_0} \cos\theta \right) + \left| \frac{\sigma_S}{c\varepsilon_0} \right|^2 \cos^2 \theta \right]}$ ，在 $\theta \rightarrow 0$ 时，角谱能量无穷大。因此，当粒子速度趋于光速时，几乎所有远场光子全部沿电子轨迹方向辐射。

4.2.2 强度与定向性

首先，关注光激发前后对远场辐射强度与定向性的影响。数值求解角谱及如下图 4-1 所示，不难得出，辐射强度方面：光激发后能谱比平衡态大近两个数量级，极大增强了渡越辐射强度；定向性方面：随着速度的增大，虽然最大辐射角 θ_m 与速度关系无明显变化，但从角谱图中可以看出，辐射的定向性增强。

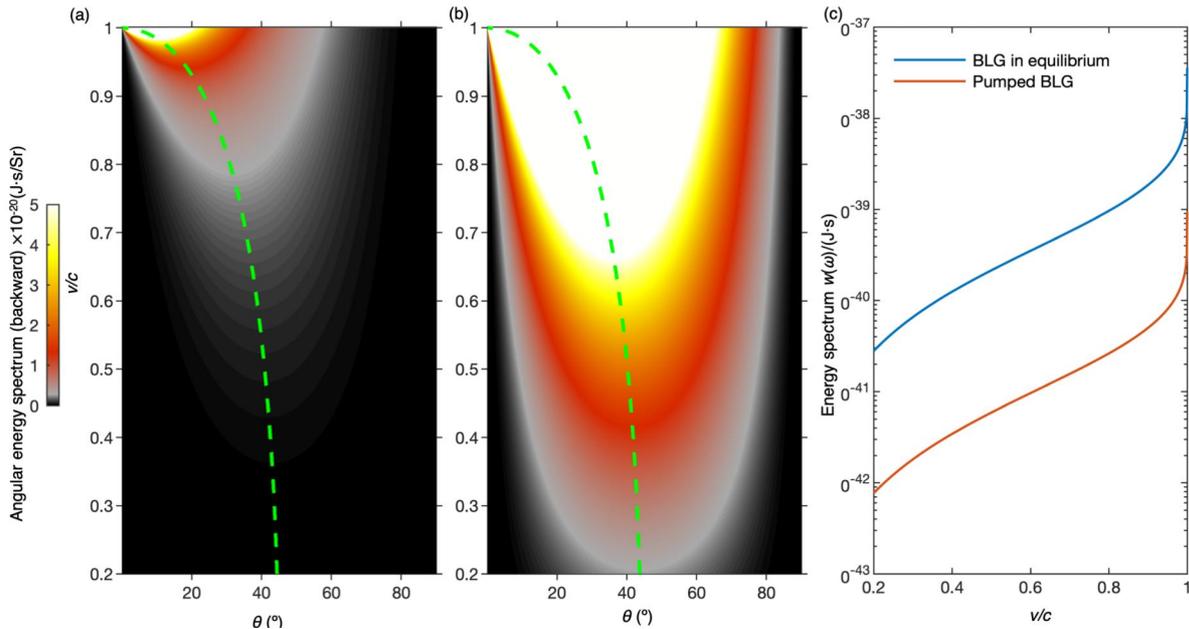


图 4-1 工作频率为 47.1THz，双层石墨烯参数与 2-4 保持一致。(a)平衡态石墨烯后向角谱；(b)光激发后石墨烯后向角谱；(c)能谱密度。

另外，本文考虑能谱随着频率，速度的变化，同时为了说明双层石墨烯的特性，本文加入单层石墨烯进行对比（除无带隙 $\Delta = 0.2 \text{ eV}$ 外，参数与平衡态石墨烯完全一致，即： $T=300\text{K}$ ，散射率 $\eta = \frac{\hbar}{2\tau} = \frac{10}{2\pi} \text{ meV}$ ，化学势 μ 为 0.3 eV ，另外，光激发后石墨烯能级为 $\mu_e = -\mu_h = \mu = 0.3 \text{ eV}$ 。）其中单层石墨烯的光导电导^[53]计算公式不在此赘述（见附录 1）：

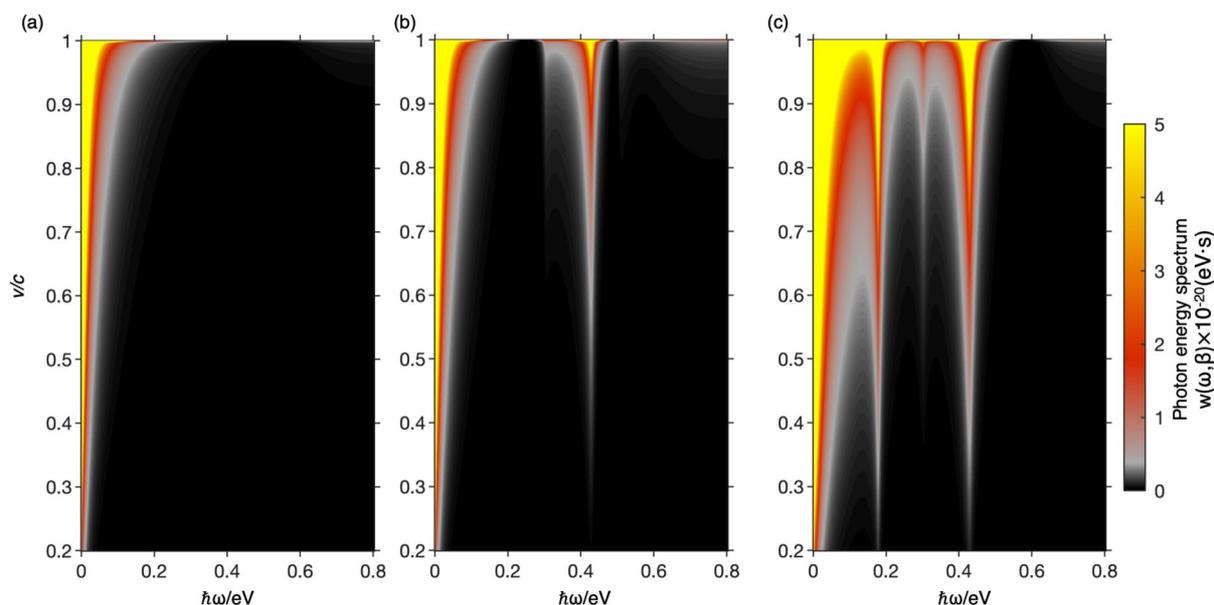


图 4-2 激发光子能谱与频率，速度的关系。(a)单层石墨烯；(b)双层平衡态石墨烯；(c)光激发双层石墨烯。

从图 4-2 中发现，异常能谱峰如双层石墨烯光导实部的吸收峰（ 0.4eV 处）、增益峰（ 0.5eV 处）以及虚部的峰（ 0.3eV 处）完全一一对应，如图(b)在 $0.3, 0.4, 0.5\text{eV}$ 处的峰，图(c)在 $0.2, 0.3, 0.4\text{eV}$ 处的光谱峰，与图 2-4 完全对应，并且在强度上也有一定对应关系。因此，这样的辐射机制为二维材料光导特性的研究提供强有力的理论支持，不同于 EELS（电子能量损失谱），本方法直接对远场光子辐射进行探测，并且远场光子无论是在吸收峰、增益峰处都会产生增益，这与近场等离激元在吸收峰处产生损耗的机制不一致并且违反了常识，限于能量谱未能解析求解，这背后的物理机制仍然值得进一步研究。

另外，不难看出，在更高的速度下，有更宽频率范围的光子受激发，换言之，远场光子激发更偏好更高速的电子，下关注光激发后的双层石墨烯，数值求解不同速度场图如图 4-3 示。

从图 4-3 可以看出，分别选取 $0.85c, 0.95c, 0.98c, 0.999c$ 的粒子速度，在较低速度时，磁场的平面波特特性不够明显，但是随着速度的增加，磁场强度增加，更重要的是，平面波特特性显著地体现出来，说明此时电磁场有非常高的定向性，基于此实现粒子探测具有广阔的前景。

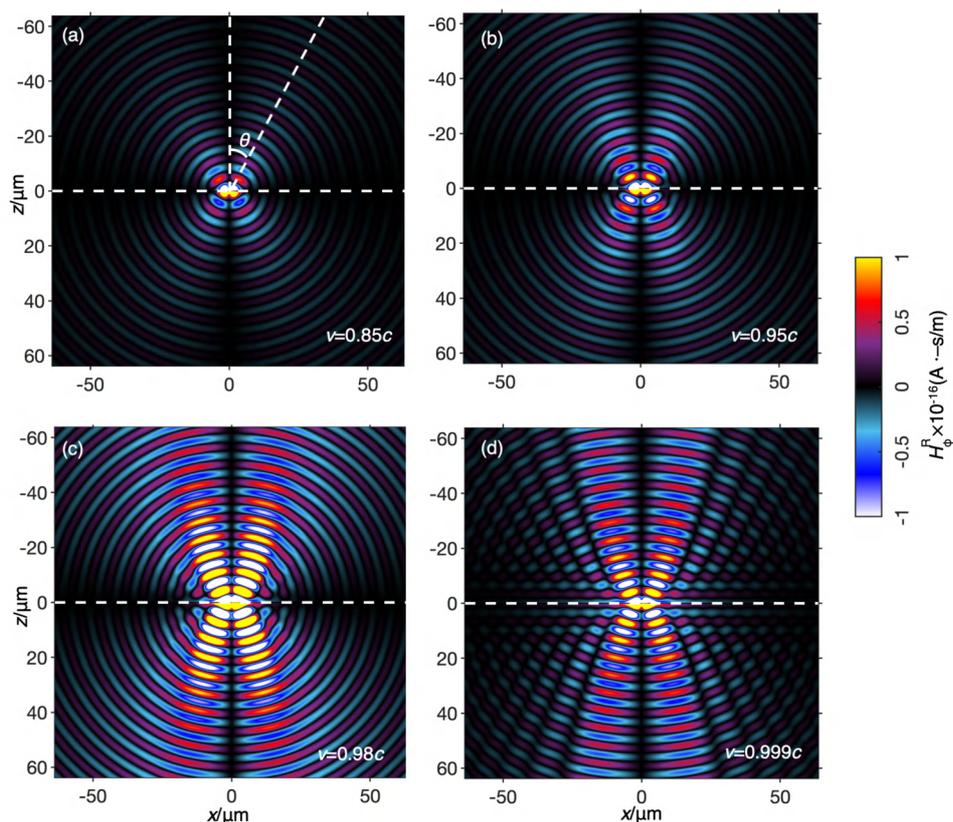


图 4-3 47.1THz 光激发双层石墨烯不同粒子速度下的场分布。(a)-(d)电子速度分别为 0.85c, 0.95c, 0.98c, 0.999c。

4.3 本章小节

本章在第三章解析计算了电磁场量的基础上，利用波印亭矢量，对自由传播的平面波的电磁场能量进行求解，得出了远场辐射角谱、能谱的解析表达。

本章发现，在双层石墨烯受光激发前后，辐射方向性无明显变化，但能谱增大近两个数量级。并且能谱峰的极值与光谱吸收峰、谐振峰和虚部的极值峰呈一一对应的关系，为实现新型二维材料的光导特性的探测与研究提供完全不同于传统电子能量损失谱（EELS）的实现思路。反之，这启发本文通过对已知二维材料的光导特性进行调控，实现对远场电磁辐射的调控（第六章详细阐述）。同时，通过不同速度下的场图分布，揭示更高速的电子能够激发强度更强、方向性更好的光子的现象与机理。

第五章 近场：等离激元（TM 模）

本章在 $k_{\perp} < \frac{\omega}{c}\sqrt{\epsilon_r}$ 条件下研究近场辐射，第一小节研究渡越辐射激发的 TM 模等离激元的强度，以及分布特点尤其在理论上将电磁场能量的求解一般化（运用到色散介质中），第二小节定量研究 TM 模等离激元表面波束强度（趋肤深度）；第三小节宕开一笔，关注光激发后的双层石墨烯对 TE 模等离激元表面波的支持。

5.1 等离激元强度与分布

双层石墨烯等离激元分布能够解析地表达，忽略材料损耗， $t \rightarrow \infty$ 时，等离激元对应的电磁场的能量即为激发等离激元的能量，表达激发等离激元的电磁能量^[2]为：

$$W^s = \lim_{t \rightarrow \infty} \int d\bar{r}_{\perp} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_{-\infty}^t dt' \left(\bar{E}_z^R(\bar{r}, t') \cdot \frac{\partial}{\partial t'} \bar{D}_z^R(\bar{r}, t') + \bar{E}_{\perp}^R(\bar{r}, t') \cdot \frac{\partial}{\partial t'} \bar{D}_{\perp}^R(\bar{r}, t') + \right. \\ \left. + \bar{H}_z^R(\bar{r}, t') \cdot \frac{\partial}{\partial t'} \bar{B}_z^R(\bar{r}, t') + \bar{H}_{\perp}^R(\bar{r}, t') \cdot \frac{\partial}{\partial t'} \bar{B}_{\perp}^R(\bar{r}, t') \right) \quad (5-1)$$

值得注意的是，上式中 $k_{\perp} > \frac{\omega}{c}\sqrt{\epsilon_r}$ ，即电磁波在 z 方向上是倏逝的，因此磁场能量与电场能量并不相等，因此无法利用辐射波(4-2)式进行计算，并且式(4-5)中不再成立，即无法在式中通过对 z 方向积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} dz$ 产生 $\delta(\omega - \omega')$ 项。

并且，式(5-1)采用 $\bar{E}_z^R(\bar{r}, t') \cdot \frac{\partial}{\partial t'} \bar{D}_z^R(\bar{r}, t')$ 而非 $\epsilon_r |\bar{E}_z^R(\bar{r}, t')|^2$ 是考虑介质色散的结果^[54]，在无色散媒介中二者等价。(5-1)式是(4-2)式的一般形式，在无色散媒介、辐射波条件下，简并为(4-2)式。

5.1.1 无损色散媒介中的近场能量

为了突出重点，本文以 z 方向电场能量，即含 $\bar{E}_z^R(\bar{r}, t') \cdot \frac{\partial}{\partial t'} \bar{D}_z^R(\bar{r}, t')$ 项为例：将场量代入式(5-1)，利用积分与积分变量表示形式无关，做代换 $\omega \leftrightarrow -\omega'$ ， $\bar{k}_{\perp} \leftrightarrow -\bar{k}'_{\perp}$ ，将结果对称化简，即：

$$\bar{E}_z^R(\bar{r}, t) = \hat{z} \left[\int d(-\omega') d(-\bar{k}'_{\perp}) \bar{E}_{z, -\omega', -\bar{k}'_{\perp}}^R(z) e^{i(-\bar{k}'_{\perp})\bar{r}_{\perp} - i(-\omega')t} \right] \quad (5-2)$$

进而：

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int d\bar{r}_{\perp} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_{-\infty}^t dt' \bar{E}_z^R(\bar{r}, t') \cdot \frac{\partial}{\partial t'} \bar{D}_z^R(\bar{r}, t') = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow \infty} \int d\bar{r}_{\perp} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_{-\infty}^t dt' \\ \left\{ \int d(-\omega') d(-\bar{k}'_{\perp}) \bar{E}_{z, -\omega', -\bar{k}'_{\perp}}^R(z) e^{i(-\bar{k}'_{\perp})\bar{r}_{\perp} - i(-\omega')t'} \times \right. \\ \left[\int d\omega d\bar{k}_{\perp} \epsilon_z(z, \omega) \bar{E}_{z, \omega, \bar{k}_{\perp}}^R(z) e^{i\bar{k}_{\perp}\bar{r}_{\perp} - i\omega t'} \right] + \left[\int d\omega d\bar{k}_{\perp} \bar{E}_{z, \omega, \bar{k}_{\perp}}^R(z) e^{i\bar{k}_{\perp}\bar{r}_{\perp} - i\omega t'} \right] \times \\ \left. \left[\int d(-\omega') d(-\bar{k}'_{\perp}) \epsilon_z(z, -\omega') \bar{E}_{z, -\omega', -\bar{k}'_{\perp}}^R(z) e^{i(-\bar{k}'_{\perp})\bar{r}_{\perp} - i(-\omega')t'} \right] \right\} \quad (5-3)$$

利用 $\int d\bar{r}_{\perp} e^{i\bar{k}_{\perp}\bar{r}_{\perp} - i\bar{k}'_{\perp}\bar{r}_{\perp}} = (2\pi)^2 \delta(\bar{k}_{\perp} - \bar{k}'_{\perp})$ ，式(5-3)化简为：

$\lim_{t \rightarrow \infty} 2\pi^2 \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} d\omega d\omega' \int d\bar{k}_{\perp} \int_{-\infty}^t dt' e^{-i(\omega-\omega')t'} \bar{E}_{z,\omega,\bar{k}_{\perp}}^R(z) \bar{E}_{z,-\omega',-\bar{k}_{\perp}}^R(z) [-i\omega\epsilon_z(z,\omega) + i\omega'\epsilon_z(z,-\omega')]$ 。先对 t' 积分 $\int_{-\infty}^t dt' e^{-i(\omega-\omega')t'} (-i\omega\epsilon_z(z,\omega) + i\omega'\epsilon_z(z,-\omega'))$ ，得：

$$\lim_{t \rightarrow \infty} 2\pi^2 \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} d\omega d\omega' \int d\bar{k}_{\perp} e^{-i(\omega-\omega')t} \Big|_{t'=-\infty}^{t'=t} \frac{\omega\epsilon_z(z,\omega) - \omega'\epsilon_z(z,-\omega')}{\omega - \omega'} \bar{E}_{z,\omega,\bar{k}_{\perp}}^R(z) \bar{E}_{z,-\omega',-\bar{k}_{\perp}}^R(z)$$

同理，不难得出其他方向的电场、磁场能量，并利用 $H_z = 0$ ，得：

$$\begin{aligned} W^s = & \lim_{t \rightarrow \infty} 2\pi^2 \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} d\omega d\omega' \int d\bar{k}_{\perp} e^{-i(\omega-\omega')t} \Big|_{t'=-\infty}^{t'=t} \times \\ & \left[\frac{\omega\epsilon_z(z,\omega) - \omega'\epsilon_z(z,-\omega')}{\omega - \omega'} \bar{E}_{z,\omega,\bar{k}_{\perp}}^R(z) \bar{E}_{z,-\omega',-\bar{k}_{\perp}}^R(z) + \right. \\ & \frac{\omega\epsilon_{\perp}(z,\omega) - \omega'\epsilon_{\perp}(z,-\omega')}{\omega - \omega'} \bar{E}_{\perp,\omega,\bar{k}_{\perp}}^R(z) \cdot \bar{E}_{\perp,-\omega',-\bar{k}_{\perp}}^R(z) + \\ & \left. \frac{\omega\mu(z,\omega) - \omega'\mu(z,-\omega')}{\omega - \omega'} \bar{H}_{\perp,\omega,\bar{k}_{\perp}}^R(z) \cdot \bar{H}_{\perp,-\omega',-\bar{k}_{\perp}}^R(z) \right] \end{aligned} \quad (5-4)$$

上式特点在于，在介质无损条件下，即 $\epsilon_z^*(z,\omega') = \epsilon_z(z,\omega')$ ，结合因果律约束下电磁参数的共轭对称性 $\epsilon_z(z,-\omega') = \epsilon_z^*(z,\omega')$ 得： $\epsilon_z(z,\omega') = \epsilon_z(z,-\omega')$ ，进而：

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega'} \frac{\omega\epsilon_z(z,\omega) - \omega'\epsilon_z(z,-\omega')}{\omega - \omega'} = \lim_{\omega \rightarrow \omega'} \frac{\omega\epsilon_z(z,\omega) - \omega'\epsilon_z(z,\omega')}{\omega - \omega'} = \frac{\partial(\epsilon(\omega)\omega)}{\partial\omega} \quad (5-5)$$

当 $\epsilon(\omega)$ 为常实数且电磁波是辐射波时，式(5-4)与(4-2)统一。且当 $\omega \neq \omega'$ 时，在 $t \rightarrow \infty$ 处， $e^{-i(\omega-\omega')t}$ 项使得电磁能量随时间飞速振荡。所以只有稳定的能量，（即 $\omega = \omega'$ 条件下）对表面等离激元能量有贡献。因此约化表面等离激元能量表达式：

$$\begin{aligned} W^s = & \lim_{t \rightarrow \infty} 2\pi^2 \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} d\omega d\omega' \int d\bar{k}_{\perp} e^{-i(\omega-\omega')t} \Big|_{t'=-\infty}^{t'=t} \times \\ & \left[\frac{\partial(\epsilon_z(z,\omega)\omega)}{\partial\omega} \bar{E}_{z,\omega,\bar{k}_{\perp}}^R(z) \cdot \bar{E}_{z,-\omega',-\bar{k}_{\perp}}^R(z) + \frac{\partial(\epsilon_{\perp}(z,\omega)\omega)}{\partial\omega} \bar{E}_{\perp,\omega,\bar{k}_{\perp}}^R(z) \cdot \bar{E}_{\perp,-\omega',-\bar{k}_{\perp}}^R(z) + \right. \\ & \left. \frac{\partial(\mu(z,\omega)\omega)}{\partial\omega} \bar{H}_{\perp,\omega,\bar{k}_{\perp}}^R(z) \cdot \bar{H}_{\perp,-\omega',-\bar{k}_{\perp}}^R(z) \right] \end{aligned} \quad (5-6)$$

实际上能量被分为双层石墨烯上方、内部和下方三部分，即 $\int_{-\infty}^{\infty} dz = \int_{0_+}^{\infty} dz = \int_{-\infty}^{0_-} dz + \int_{0_-}^{0_+} dz$ 。对石墨烯内部（ $\int_{0_-}^{0_+} dz$ ）：本文采用了二维材料模型描述双层石墨烯，即： $\epsilon_{\text{gra},\perp} = \frac{i\sigma_s}{\omega} \delta(z)$ ， $\epsilon_{\text{gra},z} = 0$ ，所以只有平行石墨烯表面方向（垂直粒子运动方向）的场量对石墨烯内部能量有贡献；对前向 $z > 0$ 区域积分（ $\int_{0_+}^{\infty} dz$ ）有：

$$\int_{0_+}^{\infty} dz e^{-\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_r - k_{\perp}^2}z} e^{-\sqrt{\frac{\omega'^2}{c^2}\epsilon_r - k_{\perp}^2}z} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_r - k_{\perp}^2} + \sqrt{\frac{\omega'^2}{c^2}\epsilon_r - k_{\perp}^2}} \quad (5-7)$$

同理，对后向部分 $z < 0$ 区域积分（ $\int_{-\infty}^{0_-} dz$ ）：

$$\int_{-\infty}^{0_-} dz e^{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_r - k_{\perp}^2}z} e^{\sqrt{\frac{\omega'^2}{c^2}\epsilon_r - k_{\perp}^2}z} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_r - k_{\perp}^2} + \sqrt{\frac{\omega'^2}{c^2}\epsilon_r - k_{\perp}^2}} \quad (5-8)$$

5.1.2 TM 模等离子激元色散

对式(5-4)的进一步化简可利用 TM 等离子激元色散关系（详见本章第二节）：

$$\epsilon_{r1} \sqrt{\epsilon_{r2} - \frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega^2}} + \epsilon_{r2} \sqrt{\epsilon_{r1} - \frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega^2}} + \frac{\sigma_s}{c \epsilon_0} \sqrt{\epsilon_{r1} - \frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega^2}} \sqrt{\epsilon_{r2} - \frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega^2}} = 0 \quad (5-9)$$

为简化计算，定义共振因子：

$$\bar{\zeta}_{\omega, k_{\perp}} = \epsilon_{r1} \sqrt{\frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega^2} - \epsilon_{r2}} + \epsilon_{r2} \sqrt{\frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega^2} - \epsilon_{r1}} + \frac{i \sigma_s}{c \epsilon_0} \frac{\omega}{|\omega|} \sqrt{\frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega^2} - \epsilon_{r1}} \sqrt{\frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega^2} - \epsilon_{r2}} \equiv 0 \quad (5-10)$$

此处利用了 $\sqrt{\epsilon_r - \frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega^2}} = \frac{i \omega}{|\omega|} \sqrt{\frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega^2} - \epsilon_r}$ ，从而，改写前后向辐射幅度系数：

$$a_1 = \frac{1}{\frac{i \omega}{|\omega|} \bar{\zeta}_{\omega, k_{\perp}}} b_{1, \omega, k_{\perp}}, a_2 = \frac{1}{\frac{i \omega}{|\omega|} \bar{\zeta}_{\omega, k_{\perp}}} b_{2, \omega, k_{\perp}} \quad (5-11)$$

在本例模型中， $a_1 = -a_2$ ， $\epsilon_{r1} = \epsilon_{r2} = \epsilon_r = 1$ ，从而： $\bar{\zeta}_{\omega, k_{\perp}} = 2 \epsilon_r \sqrt{\frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega^2} - \epsilon_r} + \frac{i \sigma_s}{c \epsilon_0} \frac{\omega}{|\omega|} \left(\frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega^2} - \epsilon_{r2} \right)$ ，进而解得：

$$b_{\omega, k_{\perp}} = b_{1, \omega, k_{\perp}} = -b_{2, \omega, k_{\perp}} = \frac{\frac{v}{c} \cdot \frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega^2} \epsilon_r \cdot \frac{\sigma_s}{c \epsilon_0} \sqrt{\frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega^2} - \epsilon_r}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \epsilon_r + \frac{k_{\perp}^2 v^2}{\omega^2} \right)} \quad (5-12)$$

用 $b_{\omega, k_{\perp}}$ 表达 (5-6) 式 W^s 为：

$$W^s = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{q^2}{32 \pi^3 \epsilon_0} \int_0^{\infty} d(k_{\perp}^2) \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{e^{-i(\omega - \omega')t}}{\bar{\zeta}_{\omega, k_{\perp}} \bar{\zeta}_{-\omega', k_{\perp}}} \frac{|b_{\omega, k_{\perp}}|^2}{\omega^2} \times \left\{ \frac{\epsilon_r \left(2 - \frac{\epsilon_r \omega^2}{k_{\perp}^2 c^2} \right) + \frac{\omega^2 \epsilon_r^2}{k_{\perp}^2 c^2}}{\sqrt{k_{\perp}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_r}} + \frac{\partial \left[\frac{i \sigma_s(\omega)}{\epsilon_0} \right]}{\partial \omega} \left(1 - \frac{\omega^2 \epsilon_r(\omega)}{k_{\perp}^2 c^2} \right) \right\} \quad (5-13)$$

注意，上式中将除 $\frac{e^{-i(\omega - \omega')t}}{\bar{\zeta}_{\omega, k_{\perp}} \bar{\zeta}_{-\omega', k_{\perp}}}$ 外所有项进行了 $\omega = \omega'$ 处理，这一点在式(5-6)中进行了解说，注意到上式符合如下积分形式：

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \varphi(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{e^{-i(\omega - \omega')t}}{\bar{\zeta}_{\omega, k_{\perp}} \bar{\zeta}_{-\omega', k_{\perp}}} = 8 \pi^2 \int_0^{\infty} d\omega \varphi(\omega) \frac{\delta(\bar{\zeta}_{\omega, k_{\perp}})}{(\partial / \partial \omega) \bar{\zeta}_{\omega, k_{\perp}}} \quad (5-14)$$

其中 $\varphi(\omega)$ 为偶函数，，代入(5-13)得：

$$W^s = \int_0^{\infty} W^s(\omega) d\omega = \frac{q^2}{4 \pi \epsilon_0} \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\omega^2} \int_0^{\infty} dk_{\perp}^2 \frac{|b_{\omega, k_{\perp}}|^2 \delta(\bar{\zeta}_{\omega, k_{\perp}})}{(\partial / \partial \omega) \bar{\zeta}_{\omega, k_{\perp}}} \times \left[\frac{\frac{\partial(\omega \epsilon_r)}{\partial \omega} \left(2 - \frac{\epsilon_r \omega^2}{k_{\perp}^2 c^2} \right) + \frac{\omega^2 \epsilon_r^2}{k_{\perp}^2 c^2}}{\sqrt{k_{\perp}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_r}} \right] \quad (5-15)$$

对 dk_{\perp}^2 积分得近场等离子激元能谱：

$$w^s(\omega) = \frac{q^2 \epsilon_r \frac{v^2}{c^2} \left| \frac{\sigma_S(\omega)}{\epsilon_0 c} - 4 \epsilon_r \frac{\epsilon_0 c}{\sigma_S} \right|^2}{\pi \epsilon_0 c \left[1 - \frac{v^2}{c^2} \left(\frac{2 \epsilon_r \epsilon_0 c}{\sigma_S} \right)^2 \right]^2} \cdot \frac{1}{-\frac{i \sigma_S}{\epsilon_0 c} \left[2 \epsilon_r - \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_S(\omega)}{\epsilon_0 c} \right)^2 \right]} \quad (5-16)$$

值得说明的是，上式仅在介质无损下成立，或者是损耗很小下的近似式，因为在式(5-5)中本文对介质做了无损的近似 $\epsilon_z(z, -\omega') = \epsilon_z(z, \omega')$ ，即介电常数的虚部为0。所以严格意义上 $\frac{i \sigma_S(\omega)}{\epsilon_0}$ 应该为一个纯实数，这种情况下，能量谱密度 $w^s(\omega)$ 为纯实数。但在 $\sigma_S(\omega)$ 实部很小时，本文对能谱的计算并不妨碍结论的正确性。

5.2 数值结果

本模型也无法激发 TE 模等离激元，因此能谱 $w^s(\omega, \beta)$ 数值求解关注中、远红外区 0.05-0.2 eV 范围 TM 等离激元的能谱特性。并且式(5-16)只是在 $\sigma_S(\omega)$ 实部较小时的近似式，所以无法对光激发后双层石墨烯的能谱进行准确求解。而平衡态双层石墨烯、单层石墨烯在 0.05 -0.2 eV 范围内光导实部是比较小的（见附录图 1 及光导图 2-4），可以用式(5-16)进行近似，但值得说明的是本文对近场场图的刻画是准确无近似的，所以可间接通过场图体现单频点近场能量大小。

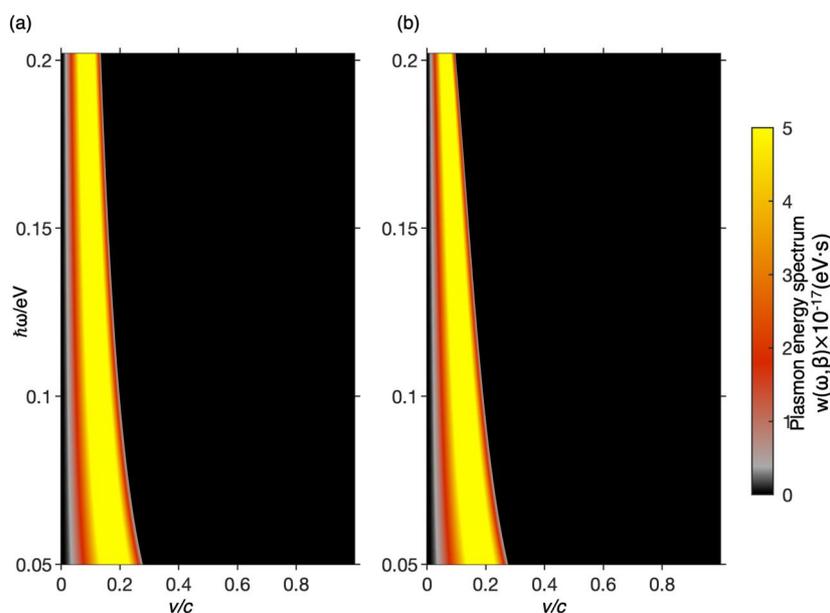


图 5-1 近场等离激元能谱，激发等离激元能谱与频率，速度的关系。(a)单层石墨烯；(b) 平衡态双层石墨烯；(a)-(b)中材料参数与图 4-2 完全一致。

由上图可以得出，与单层石墨烯相同，电子穿过双层石墨烯，电子在低速情况下能在更宽的频率范围内激发等离激元，体现出远场光子完全不同的特性，如第四章所述，远场光子的激发更青睐高速电子。另外，与远场光子的能谱强度进行比较，近场等离激元的强度比远场大三个数量级，在强度上优越性明显。

下图为 47.1THz 下近场场图特性：

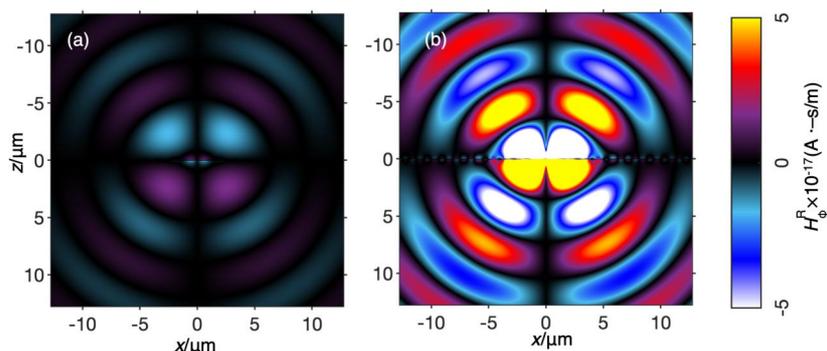


图 5-2 工作频率为 47.1THz 光激发前后双层石墨烯中红外区近场分布，工作频点为 47.1THz； (a) 平衡态石墨烯；(b)光激发石墨烯。

如上图，等离子激元在谐振峰附近从无到有（从很弱到主导整个辐射场）。另外，本文关心近场等离激元对速度的敏感性（选择性），如下图分别在近场、远场尺度上展现光激发双层石墨烯对非超高速粒子的速度的敏感度。

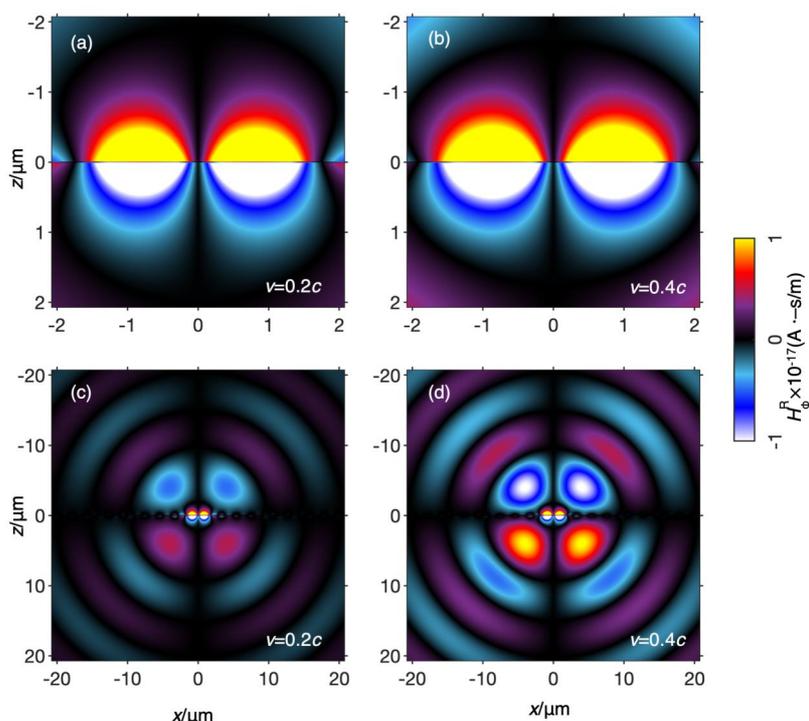


图 5-3 工作频率为 20THz，光激发后双层石墨烯（参数与图 2-4 一致）在不同（非超高速） $0.2c$ ， $0.4c$ 下的场分布。(a)电子速度为 $0.2c$ ，图为 $1/10$ 个波长范围；(b)电子速度速度为 $0.4c$ ，图为 $1/10$ 个波长范围；(c)与(a)一致但选取更大空间范围；(d)与(b)一致但选取更大空间范围（1 个波长）。

如上图所示，虽然粒子速度提高，但是如图(a)-(b)近场（十分之一一个波长范围）却没有明显增强，体系中增加的能量转化为光子的形式辐射到远场如图(c), (d)（一个波长范围）所示，但值得说明的是这种特性并非光激发后双层石墨烯独有，单层石墨烯、平衡态双层石墨烯的近场等离激元拥有类似的速度选择性特点。

5.3 TM 等离激元束缚强度

首先叙述一般情境下 TM 等离子色散关系。电磁模型同图 3-1, 考虑单调谐振波, 设区域 1 ($z < 0$) TM 波场量:

$$\begin{cases} \bar{H}_i = \hat{y}e^{i\bar{k}_i \cdot \bar{r}} \\ \bar{E}_i = -\frac{1}{\omega\epsilon_1}\bar{k}_i \times \bar{H}_i \\ \bar{k}_i = -\hat{z}k_z + \hat{x}k_x \end{cases} \quad (5-17)$$

区域 2 ($z > 0$):

$$\begin{cases} \bar{H}_t = \hat{y}Te^{i\bar{k}_t \cdot \bar{r}} \\ \bar{E}_t = -\frac{T}{\omega\epsilon_2}\bar{k}_t \times \bar{H}_t \\ \bar{k}_t = \hat{z}k_{tz} + \hat{x}k_x \end{cases} \quad (5-18)$$

匹配边界条件:

$$\begin{cases} \hat{n} \times (\bar{E}_i - \bar{E}_t) = 0 \\ \hat{n} \times (\bar{H}_i - \bar{H}_t) = \sigma_s \bar{E}_i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{k_z}{\omega\epsilon_1} = -\frac{Tk_{tz}}{\omega\epsilon_t} \\ 1 - T = \sigma_s \frac{k_z}{\omega\epsilon_1} \end{cases}$$

其中 $\hat{n} = -\hat{z}$, 进而得:

$$\frac{\epsilon_2}{k_{tz}} + \frac{\sigma_s}{\omega} + \frac{\epsilon_1}{k_z} = 0 \quad (5-19)$$

电磁场在 z 方向为倏逝, 即 k_{tz} , k_z 为纯正虚数。 $k_z = iq$, $q \in \mathcal{R}_+$ 。要求定义趋肤深度 d_p 为:

$$d_p = \frac{1}{q} \quad (5-20)$$

取前后相对介电常数、相对磁导率均为 1, 即前后都是空气, 由空气色散条件, 得:

$k_z = -\frac{2\epsilon_r\omega}{\sigma_s}$, 进而得:

$$q = \frac{2\epsilon_r\epsilon_0\omega}{-i\sigma_s} = \frac{2\omega\epsilon_0}{\sigma_{s,l}} = \frac{2k_0}{\sigma_{s,l}\eta} \quad (5-21)$$

其中 k_0 为真空波数, η 为真空波阻抗 $\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$ 。由此不难得出在前后正介电常数材料的边界必须满足虚部为正才能支持 TM 波。进一步化简得到趋肤深度与波长的关系:

$$\frac{d_p}{\lambda} = \frac{1}{\frac{2\pi}{k_0} \frac{2k_0}{\sigma_{s,l}\eta}} = \frac{\sigma_{s,l}\eta}{4\pi} \quad (5-22)$$

这里针对石墨烯材料做简单估算, 一般 $\sigma_{s,l}$ 用 $\sigma_0 = \frac{e^2}{4\hbar}$ 归一化, $\frac{\sigma_0\eta}{4\pi} = 0.0018$ 。在太赫兹至光波段, 即使在光激发下, (双层) 石墨烯光导虚部 $\sigma_{s,l}$ 不会超过 10 倍 σ_0 量级, 取 $\sigma_{s,l} = 10\sigma_0$, 得 $\frac{d_p}{\lambda} = 0.018$, 因此 TM 等离子能实现在深亚波长级别实现束缚。

在渡越辐射中, 虽然无法得到倏逝场的解析解, 但其不违背单调谐振波的色散条件式(5-19)。同时, 除 $\sigma_{s,l}$ 项外, 没有与频率有关项, 所以通过上述讨论, 不难得出在太赫兹波段至 X 射线, 双层石墨烯能够保持任意频点对 TM 表面等离子元的强束缚。

5.4 强束缚的 TE 模表面等离子激元

上一小节解析地说明（双层）石墨烯能够保持任意频点对 TM 表面等离子激元的强束缚，由此实现对光在亚波长、甚至实现几纳米范围内的灵活控制，促发了许多前景无限的应用，如太赫兹到 X 射线波段的片上集成光源^[55,56]，小型化调制器^[57]、亚波长导航^[58]和深亚波长成像^[59,60]。

而单层石墨烯对 TE 模表面等离子激元的支持早在 2007 年^[61]被发现，但是迄今为止基于 TE 模的表面等离子激元的光学器件，只有布鲁斯特效应^[62]、光学传感器^[63]、偏光器^[64]被实现，无法实现像 TM 模等离子激元一样广泛地应用，根源在于 TE 模等离子激元较弱的束缚度。但随着微纳光学器件的飞速发展，新型光子器件对强束缚 TE 模等离子激元有着迫切的需要，从而抛开对极化类型的限制。研究^[46]通过将界面正介电常数材料改为负介电常数新型人工材料，从而实现利用更大的光导实部，理论上可以实现对深亚波长段的强束缚。本文关注二维材料本身，注意到由于光激发带来的谐振增益，双层石墨烯较单层石墨烯具有更大的光导虚部，增强了 TE 模的束缚性，通过材料本身光激发的方式为提供强束缚的 TE 模等离子激元提供新思路。

下面本文解析分析双层石墨烯材料对 TE 模等离子激元的支持原理以及束缚强度。与上节类似，设区域 1 ($z < 0$) TE 波场量：

$$\begin{cases} \bar{E}_i = \hat{y}e^{i\bar{k}_i \cdot \bar{r}} \\ \bar{H}_i = -\frac{1}{\omega\mu_1} \bar{k}_i \times \bar{E}_i \\ \bar{k}_i = -\hat{z}k_z + \hat{x}k_x \end{cases} \quad (5-23)$$

区域 2 ($z > 0$):

$$\begin{cases} \bar{E}_t = \hat{y}Te^{i\bar{k}_t \cdot \bar{r}} \\ \bar{H}_t = -\frac{T}{\omega\mu_2} \bar{k}_t \times \bar{E}_t \\ \bar{k}_t = \hat{z}k_{tz} + \hat{x}k_x \end{cases} \quad (5-24)$$

匹配边界条件：

$$\begin{cases} \hat{n} \times (\bar{E}_i - \bar{E}_t) = 0 \\ \hat{n} \times (\bar{H}_i - \bar{H}_t) = \sigma_s \bar{E}_i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = T \\ -\frac{k_z}{\omega\mu_1} - \frac{Tk_{tz}}{\omega\epsilon_t} = \sigma_s T \end{cases}$$

其中 $\hat{n} = -\hat{z}$ ，进而得：

$$\frac{k_z}{\mu_1} + \frac{k_{tz}}{\mu_2} + \sigma_s \omega = 0 \quad (5-25)$$

电磁场在 z 方向为倏逝，即 k_{tz} ， k_z 为纯正虚数， $k_z = iq$ ， $q \in \mathcal{R}_+$ 。同理，取前后向介质相对介电常数、相对磁导率均为 1，即前后都是空气。由空气色散条件得： $k_z = -\frac{2\epsilon_r \omega}{\sigma_s}$ 。进而：

$$q = i\sigma_s \omega \mu_r \mu_0 = \frac{-\sigma_{s,l} \omega \mu_r \mu_0}{2} = -\frac{k_0 \eta \sigma_{s,l}}{2} \quad (5-26)$$

其中 k_0 为真空波数， η 为真空波阻抗 $\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$ 。同理，不难得出在前后正介电常数的边界必须满足虚部为负才能支持 TE 波。进一步化简得到趋肤深度与波长的关系：

$$\frac{d_p}{\lambda} = \frac{1}{\frac{2\pi k_0 \eta \sigma_{s,l}}{k_0} \cdot 2} = -\frac{1}{\sigma_{s,l} \eta \pi} \quad (5-27)$$

由上式可知，同理， $\sigma_{s,l}$ 用 $\sigma_0 = \frac{e^2}{4\hbar}$ 归一化，简单估算 $-\frac{1}{\sigma_0 \eta \pi} = 13.88$ ，则中红外至 X 射线波段，单层石墨烯有很小的虚部 $\sigma_{s,l}$ ，不超过 1 倍 σ_0 ，因此 $\frac{d_p}{\lambda} = 13.88$ ，这样得到的束缚度是非常弱的，双层石墨烯 $\sigma_{s,l}$ 在此波段约负 2 倍左右，将束缚程度增强一倍，而光激发下的双层石墨烯，以图 2-4 参数为例， $\sigma_{s,l}$ 可达到负 5 倍 σ_0 左右，取 $\sigma_{s,l} = 5\sigma_0$ ，则 $\frac{d_p}{\lambda} = 2.78$ ，束缚程度是单层石墨烯（平衡态双层石墨烯）至少 5 倍以上。

值得注意的是，虽然本辐射模型无法激发 TE 模等离激元，但由式(3-12)约束 H_z 的亥姆霍兹方程知， H_z 的激发由 $-\frac{\nabla_s \cdot \frac{\partial \bar{J}_s}{\partial z}}{i\omega\mu}$ 决定，只需引入对电子引入平行界面方向速度分量，即可实现对 TE 模等离激元的激发。因此，本节宕开一笔对 TE 模等离激元的讨论仍然是有意义的。

5.5 本章小节

本章在非自由传播，色散媒介中对电磁能量进行求解得到在无损近似下的近场等离激元能谱。发现近场等离激元收激发崭新的机理。

不同于远场光子，更低速的电子能够在更大频率范围内激发近场等离激元，并且随着电子速度的增加，近场等离激元辐射强度的增大会趋于饱和，即，即使进一步提高速度，等离激元强度无明显增强。同时，等离激元的强度与远场光子强度差异明显，等离激元能谱强度比远场光子大三个量级，为等离激元器件提供广阔应用前景。本章最后对等离激元的束缚性进行理论阐述，得出本电磁辐射模型中 TM 等离激元的强束缚性，同时宕开一笔论证了光激发下双层石墨烯对 TE 模等离激元的束缚程度的加强，有望打破等离激元器件对极化类型的限制。

第六章 远场电磁调控

影响双层石墨烯光导的参数有温度、带隙差、化学势、载流子倒置态化学势和电子散射率（电子弛豫时间），在实验手段中分别对应调节实验温度、调节双层石墨烯层间压降、调节化学掺杂浓度、调节光激发强度和控制双层石墨烯样品的纯净程度。其中电子散射率（双层石墨烯样品的纯净程度）取为 20 meV。本文在四、五章近场、远场特性中已经考虑了光激发的影响，所以此章中本文用载流子倒置态化学势 $\mu_e = -\mu_h = \mu$ 取代化学掺杂的化学势，即不考虑处于平衡态的双层石墨烯。在实验中通过外加场效应调节带隙差，以及调整外加光激发的强度能够对辐射进行动态调控。另外，由于现有手段无法对近场能谱进行精确表达，本文在这一章关注远场辐射。

为了便于理解，本文提出双层石墨烯的一组典型参数如表 6-1 所示，在本章所有小节中，除参与调控的一个参数外，其余参数均取典型值。

表 6-1 本章电磁调控确定的一组双层石墨烯的典型值

温度 T/K	带隙差 Δ/eV	光掺杂浓度 μ/eV
300	0.2	0.3

6.1 温度

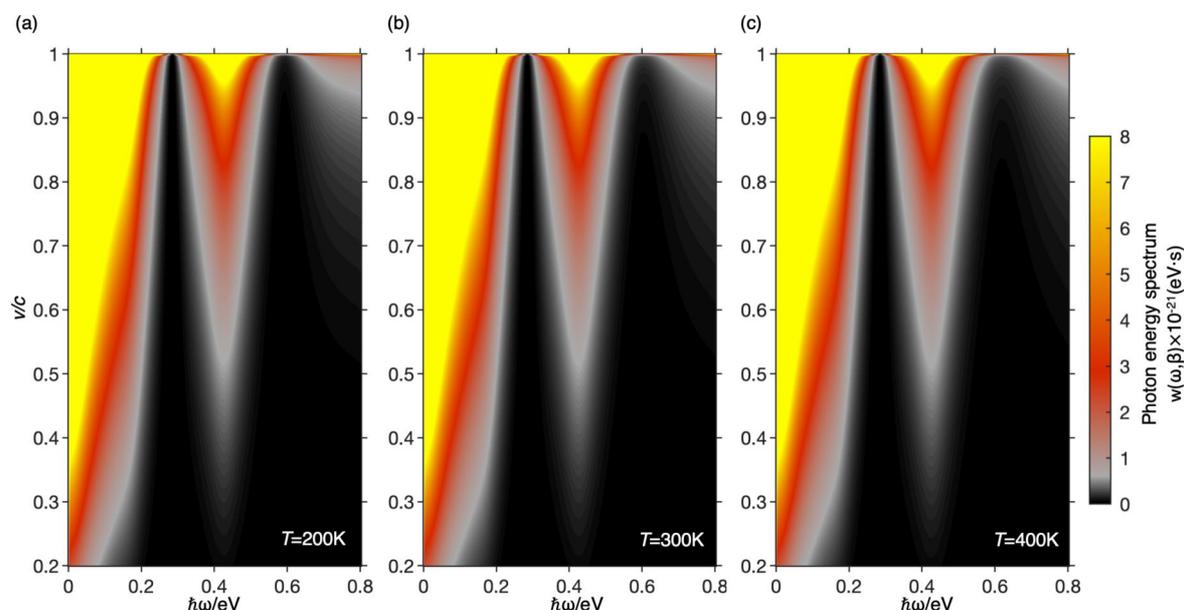


图 6-1 不同温度下的光子能谱。(a)-(c)温度分别为 100, 200 和 300eV，其余参数取表 6-1 典型值。

选取温度分别为 200, 300, 400K，如图 6-1 可知，在室温正负 100 摄氏度范围内，温度对光子能谱无明显影响。从电磁调控的角度来看是缺点，但是这里反应出实验对温度的灵敏度不高，对于实际实验环境的温度无严格要求，恰恰是优点。

6.2 光泵激发（光掺杂）

光激发后，本文利用载流子倒置态化学势 $\mu_e = -\mu_h = \mu$ 来对光激发的强度进行表征。在光激发前后的对比已经在第四章、第五章进行了探讨，而在本小节中本文主要研究不同光激发强度不同所带来的强度差异。分别取 $\mu_e = -\mu_h = \mu = 0.1, 0.2$ 和 $0.3eV$ 。

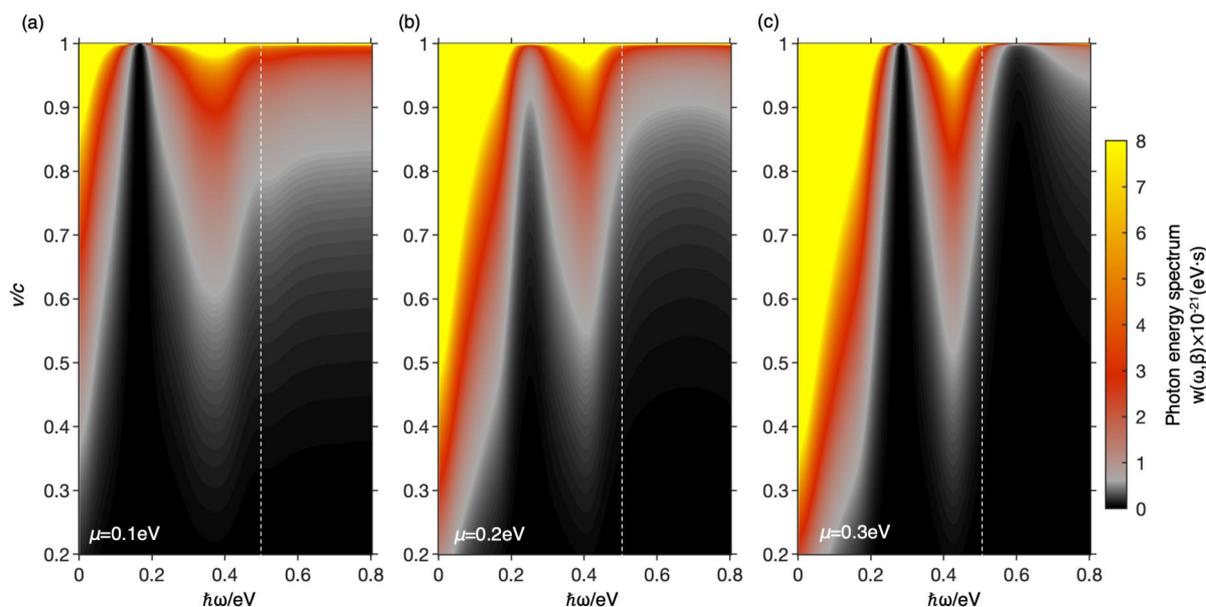


图 6-2 不同光掺杂浓度（光激发强度）下的光子能谱。(a)-(c)光激发化学势能分别为 0.1, 0.2 和 0.3 eV, 其余参数均取表 6-1 中典型值。

上图中, 本文重点关注两个特点, 第一, 在 $\hbar\omega \lesssim \gamma_1 + \frac{\Delta}{2}$ 范围 (白色虚线左侧): 如 $\hbar\omega \lesssim \mu$ (左侧黄色填涂区) 有着较强的辐射行为, 换言之, 随着 μ 的增大, 可以允许更低速度的电子在 $\hbar\omega \lesssim \mu$ 区域激发出强辐射。并且同一速度电子随着光掺杂浓度的增大会辐射更强 (如在谐振峰 $\hbar\omega \approx \gamma_1 = 0.4 \text{ eV}$ 附近); 第二, 反常的是 (白虚线右侧) 光掺杂浓度变大也会导致辐射强度更弱 (如在 $\hbar\omega > \gamma_1 + \frac{\Delta}{2} = 0.5 \text{ eV}$ 区域)。

6.3 场效应

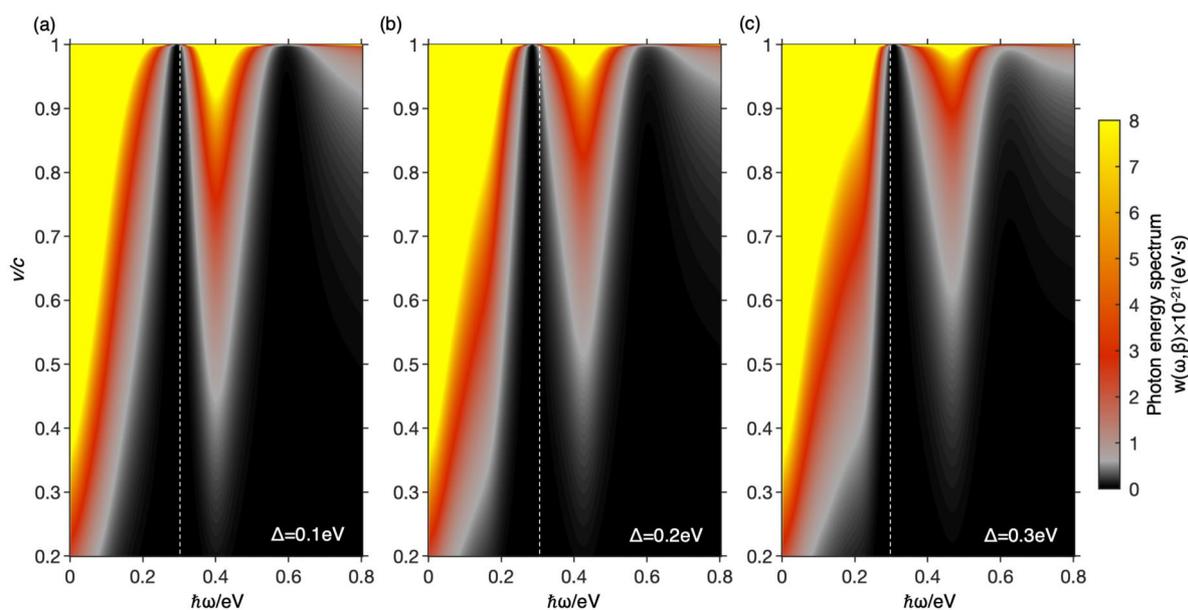


图 6-3 不同带隙差（外加电场强度）下的光子能谱。(a)-(c)带隙差分别为 0.1, 0.2 和 0.3 eV, 其余参数均取表 6-1 中典型值。

研究^[24-26]表明，通过双层石墨烯层间压降可以使得非对称带隙在 0.1 eV~0.3 eV 范围内线性可调，这里取 $\Delta = 0.1, 0.2$ 和 0.3 eV。如图 6-3，带隙差变化带来的光子能量分布变化与光激发相似但不尽相同，变化的分界频率在 $\hbar\omega \approx \mu$ （图 6-3 白色虚线），在分界频率左侧同一速度电子随着带隙差的增大能激发更强的光谱，右侧反之。

6.4 调控准则

综上，上述理论对于实验的意义为在确定电子速度下，使得指定工作频点远场辐射增强（可调）。对于光掺杂，增大光掺杂浓度来增大 $\hbar\omega \lesssim \gamma_1 + \frac{\Delta}{2}$ 区域远场光子辐射强度，反之，减小光掺杂浓度来增大 $\hbar\omega \gtrsim \gamma_1 + \frac{\Delta}{2}$ 区域远场光子辐射强度；对于外加电场，增大外加电场来增大 $\hbar\omega \lesssim \mu$ 区域远场光子辐射强度，反之，减小外加电场来减小 $\hbar\omega \lesssim \mu$ 区域远场光子辐射强度。

另外，对比图 6-2 与图 6-3，不难发现远场辐射对于光激发的灵敏度要大于场效应，通过调整光掺杂浓度在大范围内“粗调”，进而通过调整场效应“细调”，使工作频点的辐射强度符合实验条件。

6.5 本章小节

本章探究温度、带隙差和载流子倒置态化学势对远场电磁辐射强度的影响，即，研究远场辐射的温度灵敏度以及场效应、光掺杂对远场辐射的调控作用。系统地得出了如何利用场效应、光掺杂对远场辐射进行有效的调控的准则。本章基于二维材料本身而非设计周期长的结构化电磁环境，理论上实现对远场光子调控。

第七章 展望渡越辐射

7.1 本文贡献

基于高速电子穿过双层石墨烯的运动情景，本文探究新型二维材料双层石墨烯的层间耦合、场效应和光激发等特性为渡越辐射带来的全新机理。本文利用平面波展开法结合索末菲积分路径得出渡越辐射远、近电磁场分布。进而利用波印亭定理，对远、近场能谱进行了解析表达。并研究了电子运动速度、双层石墨烯带隙差和光掺杂浓度等变量与自由电子渡越辐射的强度、能谱、方向性的关系。

本文揭示了远场光子与近场等离子激元的激发特点；发现了远场辐射能谱与双层石墨烯光导谱峰的一致性，为二维材料特性的探测提供区别于传统电子能量损失谱法的新思路；探究了光掺杂对辐射强度的增强作用；论证了不同等离子激元模式的束缚程度，利用光激发将 TE 等离子激元束缚程度提高 5 倍以上；阐述了通过改变二维材料本身的光学特性对远场光子辐射进行调控的准则，为基于渡越辐射的太赫兹光源、粒子探测器提供理论指导。

下对未来渡越辐射的研究方向与重点进行展望。

7.2 基础辐射机理与应用

从基础物理的角度，渡越辐射的机理研究仍然是值得科学家深耕的领域。在辐射机理上，渡越辐射与切伦科夫辐射、史密斯-帕塞尔辐射（Smith-Purcell radiation）为三种典型的自由电子辐射（韧致辐射和同步辐射也是典型的自由电子辐射，本文不做探究），物理学家用简洁唯美的公式解析表达了切伦科夫辐射角与宿主介质色散的关系，在宿主材料在有损耗甚至奇异色散关系下仍然适用。其机理的普适、简洁带来了许多创新性的成果，如实验利用双曲新型人工电磁材料实现的切伦科夫辐射将速度阈值降低到 0.01 倍光速量级^[65]。对于史密斯-帕塞尔辐射，虽然具体的辐射机理^[66]仍然处于猜想阶段，但通过动量能量守恒、多普勒频移得出的史密斯-帕塞尔辐射角^[66]与周期光栅的关系是简洁完备的，并通过广泛的实验得到了验证。而对于渡越辐射的公式化表述是不够优美、完备的，例如诺贝尔物理学奖得主 Vitaly Ginzburg^[21]教授对渡越辐射近场等离子激元特性进行了解析表达，但对介质做了无吸收（无损）的近似，而切伦科夫辐射波前辐射、速度阈值等特征在介质有损、色散条件下仍然适用。渡越辐射理论亟待完备。

从工程应用的角度，太赫兹波段是电磁波谱中唯一没有被广泛应用的波段，在此波段如何实现高定向性、高强度的辐射源^[67]是亟待解决的问题，虽然科学家通过自由电子辐射实现了宽频段的辐射源，但是强度、定向性仍未达到应用推广的程度，集成程度与应用也仍有较大差距。其进一步优化仍然受限于理论的不完善，如电子科技大学刘盛纲院士提出的表面极化切伦科夫辐射光源^[68]中对金属片的设计停留在电磁场仿真阶段，因此未来对渡越辐射理论的研究是提升太赫兹波段辐射源特性的关键一环。另外，渡越辐射对粒子探测的重要意义早在 1975 年^[69]就被发掘，但即便拥有没有速度阈值的优点，

渡越辐射粒子探测器的实现较切伦科夫探测器相比仍不够成熟，根源也是因为科学家对渡越辐射理论了解得不够彻底。

7.3 电子运动方式

对于电子的运动方式，已有实验通过斜入射电子流与范德华异质结作用实现可调的 X 光源^[70]，但是其理论并不完备，无法站在更高的角度对实验参数进行优化。因此，斜入射电子的渡越辐射是亟待解决的问题。另外，对于变速运动的高速电子产生的电磁辐射也没有相关理论，高速运动电子在加速或者减速产生的辐射机理被韧致辐射理论^[71]概括，那么变速运动的电子穿过界面时会为渡越辐射带来新的机理。综上，渡越辐射对电子运动方式的扩展会为渡越辐射这一沉淀了几十载的机理带来新的活力。

7.4 结构化电磁环境

7.4.1 二维材料

渡越辐射将自由电子与界面相关联，而二维材料契合“界面”的特点，同时其新奇的光学特性为渡越辐射提供了可调控的平台，本世纪对于二维材料及其异质结的研究异常火爆，如石墨烯良好的光学特性及其“魔角”石墨烯的超导特性一直引领着凝聚态物理、多体物理、纳米电子学、光子学和材料科学研究的前沿。而丰富的二维材料库如氮化硼、黑磷、扭曲碳原子层及其范德华异质结为自由电子施展拳脚的空间提供了无限可能。当然，另一个思考角度是将二维材料与结构化的电磁环境联系起来。如：“空气—二维材料界面—介质板—二维材料界面—空气”，这样的结构使得前后向电磁波产生干涉。同时，在此结构中，介质板的厚度以增强远场辐射的方向性、强度以及近场电磁波束缚程度的目标进行优化。

另外，碳基材料^[72]（如碳纳米管）取代硅实现大规模甚至超大规模集成电路前景无限，虽然渡越辐射对高速电子与二维材料的作用的研究尺度与半导体器件处于不同的物理研究尺度，但是前者（单个电子尺度）的研究能够为更为宏观（电流尺度）的半导体器件提供更底层的理论基础。

7.4.2 光子晶体

除二维材料外，电子与由纯电介质周期性排列形成的“晶体”结构（如一维光子晶体，它由二维无限大电解质 A，B 在一个方向上交替填充，周期厚度与空气中光波长可比拟）作用产生的渡越辐射能够获得高定向性的谐振渡越辐射^[8]。但是受限于谐振带来的窄频带的特点，如何通过设计光子晶体的结构（电介质 A 厚度 d_1 ，相对介电常数 $\epsilon_{r,1}$ ，电解质 B 厚度 d_2 ，相对介电常数 $\epsilon_{r,2}$ ）在满足高定向性的前提下，实现对一定频段内甚至宽频段内最大强度的渡越辐射仍是研究的重要方向。对于更高维度的光子晶体，切伦科夫辐射在二维光子晶体^[73]中的无阈值特性以及反向的波前特性得到了研究，这启发本文渡越辐射与二维光子晶体也蕴含新的机理。另外，一维光子晶体界面处用二维材料加以修饰，那么二维材料支持的等离子激元也能为这样的辐射带来新的物理特性。

7.4.3 （双）各向异性介质板

实际实验中的光子晶体，如一维光子晶体，在一维方向上不是无限大的，因此，如果将此“准”光子晶体等效为一个介质板，那么是否可以根据等效介质理论^[74]，确定一组相对介电常数张量 $\bar{\epsilon}_r$ ，相对磁导率张量 $\bar{\mu}_r$ ，将此光子晶体等效为一个介质板，从而本文将一个复杂的数千层（如在光波段 2 mm 周期与光波长可比拟的光子晶体）的电磁波干涉问题等效为两个界面的前后干涉，这样的研究能够简化对光子晶体的计算。另一方面，对渡越辐射与各向异性介质板的研究也是充满前景的。研究表明各向同性的介质板^[81]与光子晶体的渡越辐射都具有高定向性。那么，在此基础上设计各向异性介质，能够实现辐射强度与定向性的优化。同时如果在各向异性介质板界面处加上二维材料进行修饰，数学上电磁场干涉项新的可控变量，物理上介质板表面引入了表面等离子激元。另外对手性材料，同时，高速电子与手性材料^[75]这一引起广泛的关注的各向同性材料的研究也能引发新的物理机制。如果将负数拓展入介质板相对介电常数、相对磁导率张量的可行域得到负折射率材料，又为渡越辐射提供了崭新的平台。

综上，新型人工电磁材料（理论上，所有材料都可以由四个电磁本构参数 $\bar{\epsilon}, \bar{\mu}, \bar{\zeta}, \bar{\xi}$ 进行描述）、新型二维材料及其结构化的电磁结构让渡越辐射的研究常研常新。

参考文献

- [1] GINZBURG V L, TSYTOVICH V N. Several problems of the theory of transition radiation and transition scattering[J]. *Physics Reports*, 1979, 49(1): 1-89.
- [2] GINZBURG V L. Transition radiation and transition scattering[M]. A. Hilger, 1990.
- [3] GINZBURG V L, FRANK I M. Radiation of a uniformly moving electron due to its transition from one medium into another[J]. *Journal of Physics (USSR)*, 1945, 9: 353-362.
- [4] GOLDSMITH P, JELLEY J V. Optical transition radiation from protons entering metal surfaces[J]. *Philosophical Magazine*, 1959, 4(43): 836-844.
- [5] CHERENKOV P A. Visible emission of clean liquids by action of gamma radiation[J]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1934, 2(451-454).
- [6] FRANK I, TAMM I G. Coherent Visible Radiation of Fast Electrons Passing Through Matter[M] In TAMM I E, BOLOTOVSKII B M, FRENKEL V Ya, et al. *Selected Papers*. Berlin, Heidelberg: Springer, 1991: 29-35.
- [7] GONG S, HU M, WU Z, et al. Direction controllable inverse transition radiation from the spatial dispersion in a graphene-dielectric stack[J]. *Photonics Research*, 2019, 7(10): 1154-1160.
- [8] LIN X, EASO S, SHEN Y, et al. Controlling Cherenkov angles with resonance transition radiation[J]. *Nature Physics*, 2018, 14(8): 816-821.
- [9] OCHIAI T. Efficiency and angular distribution of graphene-plasmon excitation by electron beam[J]. *Journal of the Physical Society of Japan*, 2014, 83(5): 54705.
- [10] ZHANG K C, CHEN X X, SHENG C J, et al. Transition radiation from graphene plasmons by a bunch beam in the terahertz regime[J]. *Optics Express*, 2017, 25(17): 20477-20485.
- [11] LIAO G Q, LI Y T, ZHANG Y H, et al. Demonstration of coherent terahertz transition radiation from relativistic laser-solid interactions[J]. *Physical Review Letters*, 2016, 116(20): 205003.
- [12] DE VRIES K D, PROHIRA S. Coherent transition radiation from the geomagnetically induced current in cosmic-ray air showers: Implications for the anomalous events observed by ANITA[J]. *Physical Review Letters*, 2019, 123(9): 91102.
- [13] CASALBUONI S, SCHMIDT B, SCHMÜSER P, et al. Ultrabroadband terahertz source and beamline based on coherent transition radiation[J]. *Physical Review Special Topics-Accelerators and Beams*, 2009, 12(3): 30705.
- [14] CHU A N, PIESTRUP M A, BARBEE JR T W, et al. Transition radiation as a source of x rays[J]. *Journal of Applied Physics*, 1980, 51(3): 1290-1293.
- [15] PIESTRUP M A, BOYERS D G, PINCUS C I, et al. Observation of soft-x-ray spatial coherence from resonance transition radiation[J]. *Physical Review A*, 1992, 45(2): 1183.
- [16] DOLGOSHEIN B. Transition radiation detectors[J]. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, 1993, 326(3): 434-469.
- [17] LIN X, HU H, EASO S, et al. A Brewster route to Cherenkov detectors[J]. *Nature Communications*, 2021, 12(1): 1-7.
- [18] AVOURIS P, HEINZ T F, LOW T. *2D Materials*[M]. Cambridge University Press, 2017.
- [19] CASTRO NETO A H, GUINEA F, PERES N M R, et al. The electronic properties of graphene[J]. *Reviews of Modern Physics*, 2009, 81(1): 109-162.
- [20] MCCANN E, KOSHINO M. The electronic properties of bilayer graphene[J]. *Reports on Progress in Physics*, 2013, 76(5): 56503.
- [21] ROZHKOVA V, SBOYCHAKOV A O, RAKHMANOV A L, et al. Electronic properties of

- graphene-based bilayer systems[J]. *Physics Reports*, 2016, 648: 1-104.
- [22] MCCANN E. Asymmetry gap in the electronic band structure of bilayer graphene[J]. *Physical Review B*, 2006, 74(16): 161403.
- [23] NICOL E J, CARBOTTE J P. Optical conductivity of bilayer graphene with and without an asymmetry gap[J]. *Physical Review B*, 2008, 77(15): 155409.
- [24] MIN H, SAHU B, BANERJEE S K, et al. Ab initio theory of gate induced gaps in graphene bilayers[J]. *Physical Review B*, 2007, 75(15): 155115.
- [25] CASTRO E V, NOVOSELOV K S, MOROZOV S V, et al. Electronic properties of a biased graphene bilayer[J]. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 2010, 22(17): 175503.
- [26] CASTRO E V, NOVOSELOV K S, MOROZOV S V, et al. Biased Bilayer Graphene: Semiconductor with a Gap Tunable by the Electric Field Effect[J]. *Physical Review Letters*, 2007, 99(21): 216802.
- [27] KUZMENKO A B, BENFATTO L, CAPPELLUTI E, et al. Gate Tunable Infrared Phonon Anomalies in Bilayer Graphene[J]. *Physical Review Letters*, 2009, 103(11): 116804.
- [28] CAPPELLUTI E, BENFATTO L, KUZMENKO A B. Phonon switching and combined Fano-Rice effect in optical spectra of bilayer graphene[J]. *Physical Review B*, 2010, 82(4).
- [29] TANG T T, ZHANG Y, PARK C H, et al. A tunable phonon–exciton Fano system in bilayer graphene[J]. *Nature Nanotechnology*, 2010, 5(1): 32-36.
- [30] GE Z, JOUCKEN F, QUEZADA E, et al. Visualization and Manipulation of Bilayer Graphene Quantum Dots with Broken Rotational Symmetry and Nontrivial Topology[J]. *Nano Letters*, 2020, 20(12): 8682-8688.
- [31] LOW T. *Graphene Nanoelectronics*[M]. Springer, 2011.
- [32] SUI Y, LOW T, LUNDSTROM M, et al. Signatures of disorder in the minimum conductivity of graphene[J]. *Nano Letters*, 2011, 11(3): 1319-1322.
- [33] LOW T, GUINEA F, YAN H, et al. Novel Midinfrared Plasmonic Properties of Bilayer Graphene[J]. *Physical Review Letters*, 2014, 112(11): 116801.
- [34] YAN H, LOW T, GUINEA F, et al. Tunable Phonon-Induced Transparency in Bilayer Graphene Nanoribbons[J]. *Nano Letters*, 2014, 14(8): 4581-4586.
- [35] FEI Z, RODIN A S, ANDREEV G O, et al. Gate-tuning of graphene plasmons revealed by infrared nano-imaging[J]. *Nature*, 2012, 487(7405): 82-85.
- [36] LOW T, CHEN P Y, BASOV D N. Superluminal plasmons with resonant gain in population inverted bilayer graphene[J]. *Physical Review B*, 2018, 98(4): 41403.
- [37] BERINI P, DE LEON I. Surface plasmon–polariton amplifiers and lasers[J]. *Nature Photonics*, 2012, 6(1): 16-24.
- [38] RIVERA N, KAMINER I. Light–matter interactions with photonic quasiparticles[J]. *Nature Reviews Physics*, 2020, 2(10): 538-561.
- [39] SHENTCIS M, BUDNIAK A K, SHI X, et al. Tunable free-electron X-ray radiation from van der Waals materials[J]. *Nature Photonics*, 2020, 14(11): 686-692.
- [40] LOW T, CHAVES A, CALDWELL J D, et al. Polaritons in layered two-dimensional materials[J]. *Nature Materials*, 2017, 16(2): 182-194.
- [41] DE ABAJO F J G. Optical excitations in electron microscopy[J]. *Reviews of Modern Physics*, 2010, 82(1): 209.
- [42] DE ABAJO F J. Multiple excitation of confined graphene plasmons by single free electrons[J]. *ACS Nano*, 2013, 7(12): 11409-11419.
- [43] MIŠKOVIĆ Z L, SEGUI S, GERVASONI J L, et al. Energy losses and transition radiation produced by the interaction of charged particles with a graphene sheet[J]. *Physical Review B*, 2016, 94(12):

- 125414.
- [44] OHTA T, BOSTWICK A, SEYLLER T, et al. Controlling the electronic structure of bilayer graphene[J]. *Science*, 2006, 313(5789): 951-954.
- [45] NOVOSELOV K S, GEIM A K, MOROZOV S V, et al. Electric Field Effect in Atomically Thin Carbon Films[J]. *Science*, 2004, 306(5696): 666-669.
- [46] ZHANG X, HU H, LIN X, et al. Confined transverse-electric graphene plasmons in negative refractive-index systems[J]. *npj 2D Materials and Applications*, 2020, 4(1): 25.
- [47] LIN X, KAMINER I, SHI X, et al. Splashing transients of 2D plasmons launched by swift electrons[J]. *Science Advances*, 2017, 3(1): e1601192.
- [48] MAHAN G D. Many-Particle Physics[M]. Springer Science & Business Media, 2000.
- [49] PEIERLS R. Zur Theorie des Diamagnetismus von Leitungselektronen[J]. *Zeitschrift für Physik*, 1933, 80(11): 763-791.
- [50] BROWN J W, CHURCHILL R V. Complex variables and applications[M]. McGraw-Hill, 2009.
- [51] ABRAMOWITZ M, STEGUN I A, ROMER R H. Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables[M]. American Association of Physics Teachers, 1988.
- [52] CHEW W. Waves and fields in inhomogeneous media[M]. Springer, 1990.
- [53] GUSYNIN V P, SHARAPOV S G, CARBOTTE J P. Unusual microwave response of dirac quasiparticles in graphene[J]. *Physical Review Letters*, 2006, 96(25): 256802.
- [54] LANDAU L D, LIFSHITZ E M. Electrodynamics of Continuous Media[M]. Amsterdam: Pergamon, 1984.
- [55] ROSOLEN G, WONG L J, RIVERA N, et al. Metasurface-based multi-harmonic free-electron light source[J]. *Light: Science & Applications*, 2018, 7(1): 1-12.
- [56] WONG L J, KAMINER I, ILIC O, et al. Towards graphene plasmon-based free-electron infrared to X-ray sources[J]. *Nature Photonics*, 2015, 10(1): 46-52.
- [57] LIU M, YIN X, ULIN-AVILA E, et al. A graphene-based broadband optical modulator[J]. *Nature*, 2011, 474(7349): 64-67.
- [58] VAKIL A, ENGHETA N. Transformation optics using graphene[J]. *Science*, 2011, 332(6035): 1291-1294.
- [59] SAPIENZA R, COENEN T, RENGER J, et al. Deep-subwavelength imaging of the modal dispersion of light[J]. *Nature Materials*, 2012, 11(9): 781-787.
- [60] ZHU J, CHRISTENSEN J, JUNG J, et al. A holey-structured metamaterial for acoustic deep-subwavelength imaging[J]. *Nature Physics*, 2010, 7(1): 52-55.
- [61] MIKHAILOV S A, ZIEGLER K. New electromagnetic mode in graphene[J]. *Physical Review Letters*, 2007, 99(1): 016803.
- [62] LIN X, SHEN Y, KAMINER I, et al. Transverse-electric Brewster effect enabled by nonmagnetic two-dimensional materials[J]. *Physical Review A*, 2016, 94(2): 023836.
- [63] SUN L, ZHANG Y, WANG Y, et al. Refractive index mapping of single cells with a graphene-based optical sensor[J]. *Sensors and Actuators B: Chemical*, 2017, C(242): 41-46.
- [64] BAO Q, ZHANG H, WANG B, et al. Broadband graphene polarizer[J]. *Nature Photonics*, 2011, 5(7): 411-415.
- [65] LIU F, XIAO L, YE Y, et al. Integrated Cherenkov radiation emitter eliminating the electron velocity threshold[J]. *Nature Photonics*, 2017, 11(5): 289-292.
- [66] POTYLITSYN A P, RYAZANOV M I, STRIKHANOV M N, et al. Diffraction Radiation from Relativistic Particles[M]. Springer, 2010.
- [67] ADAMO G, MACDONALD K F, FU Y H, et al. Light well: A tunable free-electron light source on

- a chip[J]. *Physical Review Letters*, 2009, 103(11): 113901.
- [68] LIU S, ZHANG P, LIU W, et al. Surface polariton Cherenkov light radiation source[J]. *Physical Review Letters*, 2012, 109(15): 153902.
- [69] ARTRU X, YODH G B, MENNESSIER G. Practical theory of the multilayered transition radiation detector[J]. *Physical Review D*, 1975, 12(5): 1289.
- [70] HUANG S, DUAN R, PRAMANIK N, et al. Enhanced Versatility of Table-Top X-Rays from Van der Waals Structures[J]. *Advanced Science*, 2022: 2105401.
- [71] WENDIN G, NUROH K. Bremsstrahlung Resonances and Appearance-Potential Spectroscopy near the π Thresholds in Metallic Ba, La, and Ce[J]. *Physical Review Letters*, 1977, 39(1): 48-51.
- [72] QIU C, ZHANG Z, XIAO M, et al. Scaling carbon nanotube complementary transistors to 5-nm gate lengths[J]. *Science*, 2017, 355(6322): 271-276.
- [73] LUO C, IBANESCU M, JOHNSON S G, et al. Cerenkov Radiation in Photonic Crystals[J]. *Science*, 2003, 299(5605): 368-371.
- [74] CHOY T C. *Effective Medium Theory*[M]. Oxford University Press, 2016.
- [75] CIATTONI A. Fast electrons interacting with chiral matter: mirror symmetry breaking of quantum decoherence and lateral momentum transfer[J]. *ArXiv preprint arXiv:2204.03490*, 2022.

致 谢

过去二十一年的人生，充满感激。

谢谢祖国的培养，我为我是中国人感到幸运，为我是一个中国人自豪。

谢谢养育我的土地，谢谢我的家乡浒湾镇，这个只应天上有的美丽小镇。小的时候，我在抚河里和小伙伴戏水打闹，在巷子里捉迷藏，打弹珠，疯跑，每路过后街大黄狗家门口都小心翼翼踮起脚尖。偶尔有人带着相机光顾书铺街，我是不稀得指路的，好像外来者闯进了自己的乐园。爸爸在穿梭在巷子里各户人家安装修理水电，点一根烟，拧一个螺丝，平凡充实。我喜欢抬起下巴指着屋顶的太阳能，不经意对儿时的玩伴说，“哟，这家又是我爸装的，上次数到多少台了来着。”妈妈在书铺街广场跳广场舞，和镇上的姊妹们议论着谁家的谁谁。奶奶好像永远都穿着围裙，喜欢捧着碗和街坊们开时事大会，探讨小镇时蔬物价的合理性。时光荏苒，我早就不在巷子里疯跑，巷子里也贴上了很多亮堂堂的牌匾，爸爸的店搬到了新街上，老房子旁的羁绊牵连随着搬家渐行渐远。但总有孩童在巷子里不知疲倦地跑着，爸爸还是在给小镇安装水电，妈妈最近学了新舞，奶奶又发明了新的菜肴。家乡的风土人文塑造了我的性格，伴随着我的成长。

谢谢我亲爱的家人，毛头小子咕咕落地是二十一年前了，家人们给予我无尽的关心和爱。打记事起，奶奶无微不至的照顾我，说来惭愧，奶奶从小到大的陪伴让我一直过着衣来伸手，饭来张口的生活。谢谢奶奶不求回报地为我，为家默默的付出。爸爸妈妈为了家忙前忙后，不辞辛劳地打拼，除了给我基本的物质保障，在各方面严格地要求我，教我坚韧，教我谦逊内敛，我的所有优点（如果有的话哈哈），好的品德大都来自这两个大半辈子都在中国偏远小镇上劳作的两个平凡却伟大的人。谢谢我的长辈们，外婆、姑婆们、姑姑们、舅舅、小姨们在我成长路上指点迷津。谢谢这个充满爱的大家庭，造就了今天的我。

谢谢我的老师们，无畏后生自迈进学堂起过去十七年了。从小学到大学，许多老师们给了我许许多多的帮助。幼儿园王琴老师、小学班主任吴慧芬老师、小学数学老师朱禹民、陈竞芳老师、初中班主任丁仙华老师、英语老师朱琴芝老师、高中班主任徐高东老师和纪燕敏老师（果然我还是把致谢写成了花名册哈哈）教会我许多微不足道但却让我一生受益的行为规范。我在一个升学压力、应试竞争压力与工业化水平完全不匹配的“才子之乡”受教育，老师们不仅教会我知识，更教会我坚持，给了我不到最后一刻绝不放弃的毅力与决心。更重要的，谢谢老师们让我在这个失败成本很大的时代里，拥有直面失败的勇气以及不断试错的信心。

谢谢我的母校北京邮电大学，懵懂的少年拖着行李箱站在沙河校区校门口已经是四年前了。这四年来的生活快乐而充实，谢谢学校给予我世界一流的教育，谢谢后勤阿姨叔叔们默默的付出，谢谢学业班主任王小卉老师在我最黑暗的时刻用亲身经历开导我，让我面对失败时走出沮丧。谢谢学术导师崔岩松老师不厌其烦地给予我帮助。谢谢黄德兴、齐皓清等好朋友们，室友们的理解与宽容。谢谢与小西瓜的相遇，谢谢我们一起走过的无数小欢喜。也谢谢自己，四年的光阴不被虚度，不愧于心。

谢谢所有我爱的和爱我的人们，今后别离的日子里，早安，午安，晚安。

附录

附录 1 单层石墨烯光导

单层石墨烯光导的推导方式与双层石墨烯类似，即：能带结构结合 Kubo 机理，由于结构更为简单，最终公式表达形式也更为简单：

$$\sigma_S(\omega, \mu_c, \tau, T) = -\frac{ie^2(\omega + i/\tau)}{\pi\hbar^2} \left[\frac{1}{(\omega + i/\tau)^2} \int_0^{+\infty} E \left(\frac{\partial f_d(E)}{\partial E} - \frac{\partial f_d(-E)}{\partial E} \right) dE - \int_0^{+\infty} \frac{f_d(-E) - f_d(E)}{(\omega + i/\tau)^2 - 4(E/\hbar)^2} dE \right]$$

其中 ω 为角频率， μ_c 为化学势， τ 为弛豫时间， T 为开尔文温度， $f_d(E)$ 为费米-狄拉克分布 $f_d(E) = \left(e^{\frac{E-\mu_c}{k_B T}} + 1 \right)^{-1}$ ， k_B 为玻尔兹曼常数，或者表述为：

$$\sigma_S(\omega, \mu_c, \tau, T) = \sigma_{S, \text{intra}} + \sigma_{S, \text{inter}}$$

其中 $\sigma_{S, \text{intra}}$ 和 $\sigma_{S, \text{inter}}$ 分别表示与单层石墨烯带内，带间相关的光导， $\sigma_{S, \text{intra}} = \frac{ie^2 k_B T}{\pi\hbar^2 (\omega + \frac{i}{\tau})} \left(\frac{\mu_c}{k_B T} + 2 \ln \left(e^{-\frac{\mu_c}{k_B T}} + 1 \right) \right)$ ， $\sigma_{S, \text{inter}} = \frac{ie^2 (\omega + \frac{i}{\tau})}{\pi\hbar^2} \int_0^{\infty} \frac{f_d(-E) - f_d(E)}{(\omega + \frac{i}{\tau})^2 - 4(\frac{E}{\hbar})^2} dE$ ，下给出正文中单层石墨烯的光导图：

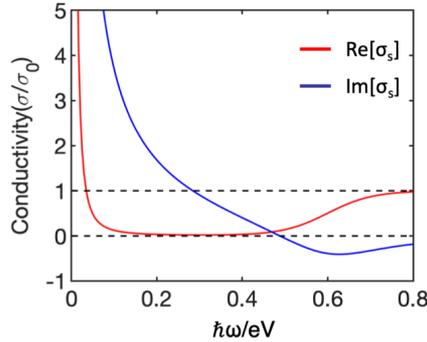


图 1 单层石墨烯光导，参数与正文一致， $\mu_c = 0.3 \text{ eV}$ ， $T = 300 \text{ K}$ ， $\tau = \hbar/(2\eta)$ ， $\eta = 10/(2\pi) \text{ mV}$

附录 2. 求解双层石墨烯光导的另一方式^[36]

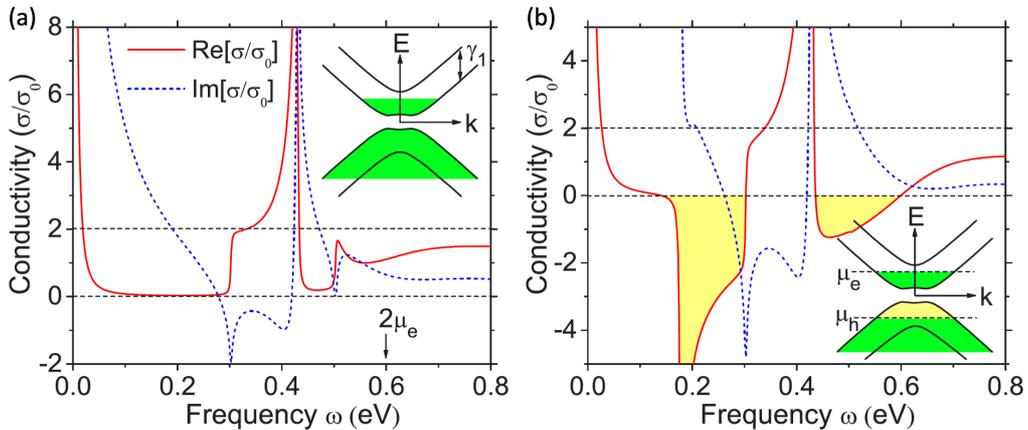


图 2^[36]正文图 2-4 的标准对比图， $\eta = 10 \text{ meV}$ ，其他参数与图 2-4 一致。(a)平衡态度双层石墨烯；(b)光激发双层石墨烯